INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY na GVM

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

Zobrazení, funkce, vlastnosti funkcí

Autor	Ondřej Chudoba
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	1. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16–19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a úlohy k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí poznat zobrazení resp. funkci, ovládá základní vlastnosti funkcí, znalosti umí aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků a k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady

1. Příklad

Jednociferným přirozeným číslům přiřadíme písmena latinské abecedy takto:
$1 \to h, 2 \to u, 3 \to r, 4 \to u, 5 \to d, 6 \to h, 7 \to k, 8 \to p, 9 \to k.$
Rozhodněte, zda je takto definováno zobrazení.

Řešení:
Ano, jedná se o zobrazení, neboť každému jednocifernému přirozenému číslu je přiřazeno právě jedno písmeno. Nebo-li neexistuje jednociferné přirozené číslo, kterému by byla přiřazena dvě různá písmena.

2. Příklad

Je dána množina $M = \{2, 4, 6, 8, 9\}$. Z některých prvků množiny M utvoříme množinu S upořádaných dvojic: $S = \{[2, 4], [4, 6], [6, 8], [9, 8], [8, 2], [6, 4], [9, 2]\}$. Rozhodněte, zda množina S definuje zobrazení. (Chápeme-li uspořádanou dvojici $[x, y]$ jako přiřazení $x \to y$.)

Řešení:
Ne, množina S nezadává zobrazení. Protože např. číslu 6 je přiřazeno číslo 8 a zároveň číslo 4. Není splněna definice zobrazení.

3. Příklad

Je dáno následující „přiřazení“ g:

$$g\colon x \to 6x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Rozhodněte, zda g je zobrazení. Rozhodněte, zda se jedná o funkci.

Řešení:
Každému reálnému číslu je přiřazen jeho šestinásobek. Vezmeme-li dvě různá reálná čísla a, b $(a \neq b)$, potom jsou těmto přiřazena čísla $6a, 6b$. A jelikož $a \neq b$, platí $6a \neq 6b$. Tedy ano, g zadává zobrazení.

Jedná se o funkci? Ano, neboť zobrazení g je z množiny reálných čísel do množiny reálných čísel.

4. Příklad

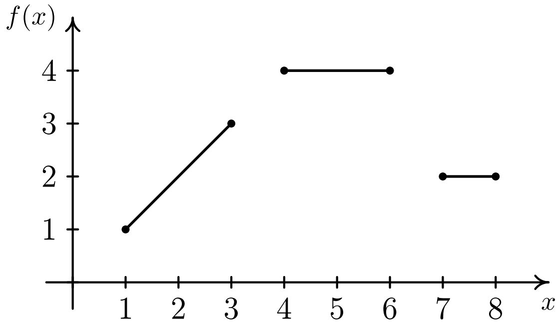
Rozhodněte, zda na obrázku 1 je zadána funkce f. Pokud ano, pak určete její definiční obor, obor hodnot, zda je funkce rostoucí/klesající, sudá/lichá, prostá, omezená.

Řešení:
Na obrázku 1 je zadána funkce f.

Definiční obor: $D_f = \langle 1, 3\rangle \cup \langle 4, 6\rangle \cup \langle 7, 8\rangle$.

Obor hodnot: $H_f = \langle 1, 3\rangle \cup \{4\}$.

Funkce není rostoucí ani klesající na celém definičním oboru. Je rostoucí na intervalu: $\langle 1, 3\rangle$. Je konstantní na intervalech: $\langle 4, 6\rangle$ a $\langle 7, 8\rangle$.



Obr. 1

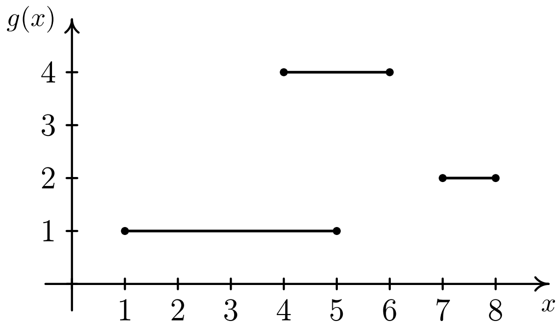
Funkce není ani sudá ani lichá.

Funkce není prostá.

Funkce je shora i zdola omezená.

5. Příklad

Rozhodněte, zda na obrázku 2 je zadána funkce g. Pokud ano, pak určete její definiční obor, obor hodnot, zda je funkce rostoucí/klesající, sudá/lichá, prostá, omezená.



Obr. 2

Řešení:

Na obrázku 2 není zadána funkce g. Totiž například číslu 5 je přiřazeno číslo 1 a zároveň 4. Nejedná se tedy ani o zobrazení.

6. Příklad

Určete definiční obor funkce f:

$$f: y = \frac{x}{\sqrt{2-4x}}$$

Řešení:

V předpisu funkce f je odmocnina a zlomek.

Ve zlomku nesmí být jmenovatel roven nule, tzn. $\sqrt{2-4x} \neq 0 \Rightarrow 2-4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Odmocnina je definována pro nezáporná čísla, tedy musí platit $2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Dohromady dostáváme, že musí platit $x < \frac{1}{2}$. Nebo-li $D_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

7. Příklad

Rozhodněte, zda daná funkce je sudá či lichá:

$$f\colon y = x^2 + 2x$$

Řešení:

Nejdříve zodpovězme otázku, zda je definiční obor dané funkce symetrický vzhledem k počátku. Tzn. rozhodněme, zda platí $\forall x \in \mathrm{D}_f$ je také $-x \in \mathrm{D}_f$.

Definiční obor dané funkce není specifikován, implicitně je tedy míněno, že je „největší možný“. Nakreslíme-li si graf funkce f (předpis si můžeme upravit $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$) je zřejmé, že definičním oborem jsou všechna reálná čísla, tedy $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$. Definiční obor tedy **je** symetrický vzhledem k počátku.

Nyní rozhodněme, zda je funkce sudá/lichá.
Dosadíme $-x$ a upravíme: $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x$.
Platí $f(-x) \neq -f(x)$ ... funkce není lichá,
$f(-x) \neq f(x)$ ... funkce není sudá.

Odpověď: Funkce není sudá ani lichá.

8. Příklad

Rozhodněte, zda daná funkce je sudá či lichá:

$$f\colon y = \frac{|x|}{2x}$$

Řešení:

Nejdříve zodpovězme otázku, zda je definiční obor dané funkce symetrický vzhledem k počátku. Tzn. rozhodněme, zda platí $\forall x \in \mathrm{D}_f$ je také $-x \in \mathrm{D}_f$.

Definiční obor dané funkce není specifikován, implicitně je tedy míněno, že je „největší možný“. Je zřejmé, že definičním oborem jsou všechna reálná čísla mimo nulu, tedy $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Definiční obor tedy **je** symetrický vzhledem k počátku.

Nyní rozhodněme, zda je funkce sudá/lichá.
Dosadíme $-x$ a upravíme: $f(-x) = \frac{|-x|}{2(-x)} = \frac{|x|}{-2x} = -\frac{|x|}{2x} = -f(x)$.
Platí $f(-x) = -f(x)$. Daná funkce je tedy lichá.

Úlohy

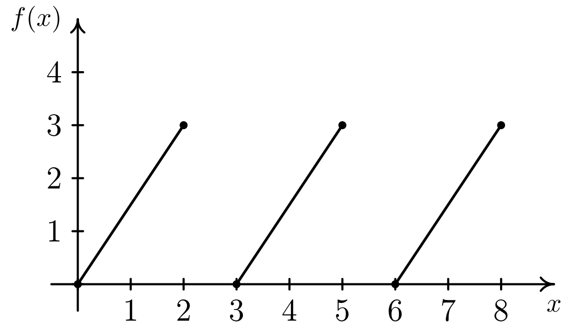
1. Úloha

Je dána množina $K = \{1, 10, 11, 10, 111\}$. Z některých prvků množiny K utvoříme množinu P upořádaných dvojic: $P = \{[1, 10], [10, 10], [11, 11], [10, 111], [111, 1], [1, 1]\}$. Rozhodněte, zda množina P definuje zobrazení. (Chápeme-li uspořádanou dvojici $[x, y]$ jako přiřazení $x \to y$.)

[Množina P nezadává zobrazení.]

2. Úloha

Rozhodněte, zda na obrázku 3 je zadána funkce f. Pokud ano, pak určete její definiční obor, obor hodnot, zda je funkce rostoucí/klesající, sudá/lichá, prostá, omezená.

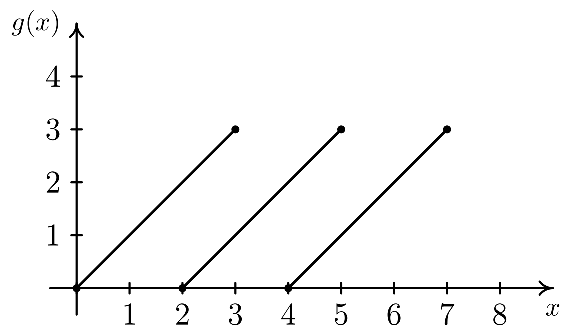


Obr. 3

[Na obrázku 3 je zadána funkce f, $D_f = \langle 0, 2\rangle \cup \langle 3, 4\rangle \cup \langle 6, 8\rangle$, $H_f = \langle 0, 3\rangle$. Funkce není rostoucí ani klesající na celém definičním oboru. Je rostoucí na intervalech: $\langle 0, 2\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$, $\langle 6, 8\rangle$. Funkce není ani sudá ani lichá. Funkce není prostá. Funkce je shora i zdola omezená.]

3. Úloha

Rozhodněte, zda na obrázku 4 je zadána funkce g. Pokud ano, pak určete její definiční



Obr. 4

obor, obor hodnot, zda je funkce rostoucí/klesající, sudá/lichá, prostá, omezená.

[Na obrázku 4 není zadána funkce g. Není splněna definice zobrazení.]

4. Úloha
Určete definiční obor funkce k:

$$k\colon y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$[D_k = \langle 0, \infty)]$

5. Úloha
Určete definiční obor funkce j:

$$j\colon y = \frac{\sqrt{2}+3x}{\sqrt{11}-2x}$$

$\left[D_j = \mathbb{R} - \left\{\frac{\sqrt{11}}{2}\right\}\right]$

6. Úloha
Rozhodněte, zda daná funkce je sudá, lichá či obojí:

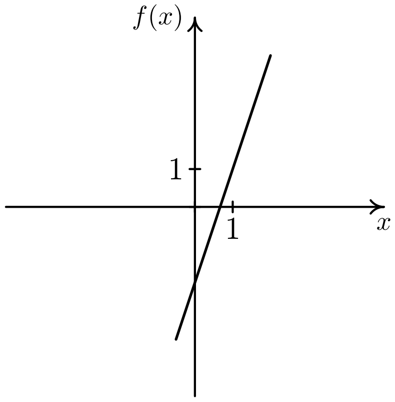
$$y = -5x^2$$

[Tato funkce je sudá.]

7. Úloha
Rozhodněte, zda daná funkce je sudá, lichá či obojí:

$$y = 3x - 2$$

[Tato funkce není lichá ani sudá. Graf funkce je na obr. 5.]



Obr. 5

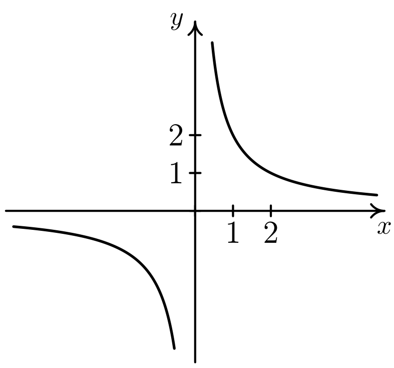
8. Úloha
Rozhodněte, zda daná funkce je sudá, lichá či obojí:

$$y = \frac{2^2}{x^{22}}$$

[Tato funkce je sudá.]

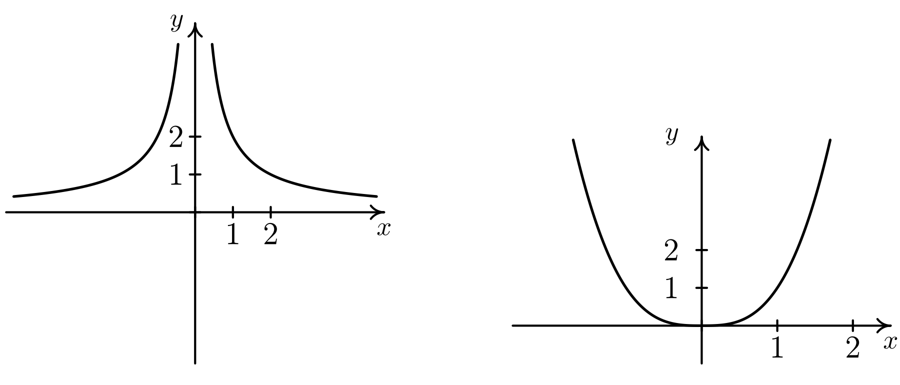
9. Úloha
Rozhodněte, zda daná funkce je rostoucí resp. klesající. Dále rozhodněte, zda je daná funkce omezená.

$$y = \frac{2}{x}$$



Obr. 6

[Tato funkce není rostoucí ani klesající. Funkce není omezená. Graf funkce je na obr. 6.]



(a) (b)

Obr. 7

10. Úloha

Rozhodněte, zda daná funkce je rostoucí resp. klesající:

$$y = \left|\frac{2}{x}\right|$$

[Tato funkce není rostoucí ani klesající. Funkce není omezená shora, je omezená zdola. Graf funkce je na obr. 7(a) na str. 7.]

11. Úloha

Rozhodněte, zda daná funkce je rostoucí resp. klesající:

$$y = \left|x^3\right|$$

[Tato funkce není rostoucí ani klesající. Funkce není omezená shora, je omezená zdola. Graf funkce je na obr. 7(b) na str. 7, pozor – na osách jsou různá měřítka.]

Použité zdroje a literatura

- BENDA, Petr. A KOL. Sbírka maturitních příkladů z matematiky. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
- BUŠEK, Ivan a KOL. Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.
- BUŠEK, Ivan. Řešené maturitní úlohy z matematiky. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
- CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
- FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
- ODVÁRKO, Oldřich. Matematika pro gymnázia – Funkce. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8.
- PETÁKOVÁ, Jindra. Matematika: příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
- POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.
- SCHMIDA, Jozef a KOL. Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.
- SCHMIDA, Jozef a KOL. Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.
- VEJSADA, František a František TALAFOUS. Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.

Text byl vysázen systémem LaTeX 2_ε.
Obrázky byly vytvořeny systémem METAPOST pomocí balíku `mfpic`.