Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

OPERACE S KOMBINAČNÍMI ČÍSLY A S FAKTORIÁLY, KOMBINACE

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	2. 12. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá operace s kombinačními čísly a s faktoriály a kombinace a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Operace s kombinačními čísly a s faktoriály, kombinace

Příklad 1

Které z čísel $A = \binom{400}{40}$, $B = \binom{401}{41}$ je větší?

Řešení:

Čísla A, B vyjádříme pomocí definice kombinačního čísla a dále budeme řešit nerovnici mezi kombinačními čísly. Tedy

$$\binom{400}{40} = \frac{400!}{40! \cdot 360!}$$

$$\binom{401}{41} = \frac{401!}{41! \cdot 360!}$$

$$\binom{400}{40} \,⌂\, \binom{401}{41}$$

Symbol ⌂ zde nyní nahrazuje neznámé znaménko rovnosti či nerovnosti

$$\frac{400!}{40! \cdot 360!} \,⌂\, \frac{401!}{41! \cdot 360!}$$

Čísla 360! ve jmenovateli můžeme krátit a ostatní faktoriály rozepsat a dostaneme

$$\frac{400!}{40!} \,⌂\, \frac{401 \cdot 400!}{41 \cdot 40!}$$

a dále

$$1 \,⌂\, \frac{401}{41}$$

Zlomek $\frac{401}{41}$ je číslo větší než 1 a proto platí

$$1 < \frac{401}{41}$$

a celkově (podle porovnávání zlomků) je

$$\binom{400}{40} < \binom{401}{41}$$

a tedy $\boldsymbol{A < B}$.

Příklad 2

Víte-li, že $\binom{13}{5} = 1287$, určete a) $\binom{13}{8}$ b) $\binom{13}{6}$.

Řešení:

a) Podle definice kombinačního čísla platí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{n-k}$. Proto také platí

$$\binom{13}{5} = \boldsymbol{\binom{13}{8} = 1\,287}$$

b) Pro výpočet využijeme následující úpravu

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!}}{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}} = \frac{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot k!}{(n-k-1)! \cdot (k+1) \cdot k!} = \frac{n-k}{k+1}$$

$$\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$$

Konkrétně pro náš případ je $n = 13$, $k = 5$ a $\boldsymbol{\binom{13}{6}} = \binom{13}{5} \cdot \frac{8}{6} = \boldsymbol{1\,716}$

Příklad 3

V množině $\boldsymbol{N}$ řešte rovnici $\binom{6}{x} + \binom{6}{x+1} = \binom{7}{4}$.

Řešení:

Pro vyřešení této úlohy si stačí uvědomit, že $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Proto platí

$$\binom{6}{x} + \binom{6}{x+1} = \binom{7}{x+1}$$

dále

$$\binom{7}{x+1} = \binom{7}{4}$$

a také

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{4}$$

Proto $\boldsymbol{x = 2}$ nebo $\boldsymbol{x = 3.}$

Příklad 4

Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

a) $2\binom{x+6}{x+4} - \binom{x+4}{x+2} = 4! + \binom{5}{2}x$

b) $\left[\binom{x}{2}\right]^2 - 5\binom{x}{2} - 6 = 0.$

Řešení:

a) Nejprve stanovíme definiční obor rovnice $x \geq -2$. Rovnici upravíme podle pravidel pro počítání s kombinačními čísly a faktoriály na tvar

$$2\frac{(x+6)!}{(x+4)! \cdot 2!} - \frac{(x+4)!}{(x+2)! \cdot 2!} = 4! + \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot x$$

$$(x+6) \cdot (x+5) - \frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot (x+3) = 24 + 10x$$

$$2x^2 + 22x + 60 - x^2 - 7x - 12 - 48 - 20x = 0$$

$$x^2 - 5x = 0$$

Proto $\boldsymbol{x_1 = 0}$; $\boldsymbol{x_2 = 5.}$ Oba kořeny vyhovují zadání úlohy a definičnímu oboru rovnice.

b) U tohoto typu rovnice nejprve využijeme substituci a to

$$\binom{x}{2} = t$$

Potom dostáváme rovnici

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$(t-6) \cdot (t+1) = 0$$

Po dosazení do substituce máme

ba) $\binom{x}{2} = 6$

$\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2} = 6$

$x \cdot (x-1) = 12$

$$(x-4)\cdot(x+3)=0$$

$x_1 = 4$ … vyhovuje řešení úlohy

$x_2 = -3$ … nevyhovuje řešení úlohy

bb) $\binom{x}{2} = -1$ … to je ale v rozporu s definicí kombinačního čísla a proto nemá smysl pokračovat dále.

Závěr: řešením dané rovnice je pouze číslo 4.

Příklad 5

Test přijímacích zkoušek se skládá z 10 otázek z biologie, 15 otázek z chemie a z 8 otázek z fyziky. V každém předmětu se vybírá ze souboru 120 otázek. Kolik je možností sestavit test?

Řešení:

Na pořadí otázek při výběru nezáleží a již vybraná a zařazená otázka se nemůže opakovat. Jedná se proto o kombinace bez opakování.

Počet možností výběru otázek pro jednotlivé předměty je:

- biologie

$$K(20,200) = \binom{120}{10} = \frac{120!}{110!\cdot 10!} = 1{,}16\cdot 10^{14}$$

- chemie

$$K(15,120) = \binom{120}{15} = \frac{120!}{105!\cdot 15!} = 4{,}73\cdot 10^{18}$$

- fyzika

$$K(8,120) = \binom{120}{8} = \frac{120!}{112!\cdot 8!} = 8{,}40\cdot 10^{11}$$

Celkem je tedy podle pravidla kombinatorického součinu

$$\binom{120}{10}\cdot\binom{120}{15}\cdot\binom{120}{8} = 4{,}61\cdot 10^{44}$$

možností sestavení přijímacího testu.

Příklad 6

V cukrárně mají 10 druhů zákusků v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit 25 zákusků?

Řešení:

Vybíráme 25 zákusků z deseti nabízených druhů, od každého druhu zákusku je v cukrárně k dispozici nejméně 25 kusů (dostatečné množství), na pořadí vybíraných zákusků přitom nezáleží. Počet všech možností pro výběr zákusků je

$$K'(25,10) = K(25,34) = \binom{34}{25} = \frac{34!}{25! \cdot 9!} = \mathbf{52\ 451\ 256}$$

Úlohy k procvičení

1. Kolikrát je číslo $L = \binom{100}{90}$ větší než číslo $M = \binom{99}{9}$?

   $[desetkrát]$

2. Víte-li, že $\binom{14}{5} = 2002$, určete $\binom{14}{4}$

   $[1001]$

3. Jedním kombinačním číslem vyjádřete

   $$\binom{10}{1} + \binom{10}{0} + \binom{11}{9}$$

   $\left[\binom{12}{2}\right]$

4. V množině $\boldsymbol{N}$ řešte rovnici $\binom{6}{x} = 15$

   $[2; 4]$

5. Řešte rovnice s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$:

   a) $\binom{x-1}{x-3} - 2 \cdot \binom{x-2}{x-4} = 0$ $[5]$

   b) $\binom{x}{1} + \binom{x-3}{x-4} = 2x - 3$ $[x \geq 4; x \in \boldsymbol{N}]$

6. Kolika způsoby lze 4 chlapce a 8 dívek rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla čtyři děvčata a 2 chlapci?

   $[420]$

7. V prodejně uzenin mají 8 druhů klobás v dostatečném množství. Kolika způsoby můžeme vybrat dvanáct nožek klobás?

   $[50\ 388]$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CALDA, Emil a DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-365-3.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.