Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

VARIACE A PERMUTACE

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá variace a permutace a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Variace a permutace

Skupiny bez opakování

Příklad 1

Kolik různých přirozených trojciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5? Kolik z nich je dělitelných dvěma? Kolik z nich je lichých?

Řešení:

Na pořadí cifer v čísle záleží, nevybíráme všechny cifry a cifry se v čísle nemohou opakovat – jedná se o variace bez opakování.

a) $\boldsymbol{V(3,5) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60}$

b) Dvěma jsou dělitelná ta, která na místě jednotek mají cifry 2 nebo 4. Proto tyto cifry „zafixujeme“ na místě jednotek a na další dvě místa vybíráme dvě cifry ze čtyř.

   Tedy $\boldsymbol{2 \cdot V(2,4) = 2 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 24}$

c) Lichá jsou ta čísla, u kterých se na místě jednotek objevuje cifra 1, 3 nebo 5 – „zafixujeme“ je a na další dvě místa vybíráme dvě cifry ze čtyř.

   Takže $\boldsymbol{3 \cdot V(2,4) = 3 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 36}$

Příklad 2

Zmenší-li se počet prvků o 27, zmenší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.

Řešení:

Text úlohy přepíšeme do rovnice

$$V(2, n-27) = \frac{1}{10} \cdot V(2,n)$$

$$\frac{(n-27)!}{(n-29)!} = \frac{n!}{10 \cdot (n-2)!}$$

Definiční obor této rovnice je $n \geq 29; n \in \boldsymbol{N}.$

$$\frac{(n-27)\cdot(n-28)\cdot\cancel{(n-29)!}}{\cancel{(n-29)!}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{10\cdot\cancel{(n-2)!}}$$

$$10 \cdot (n^2 - 55n + 756) = n^2 - n$$

$$9n^2 - 549n + 7560 = 0$$

$$n^2 - 61n + 840 = 0$$

$$(n-40)\cdot(n-21) = 0$$

Řešením rovnice jsou tedy čísla 40 a 21. 21 však nevyhovuje zadání úlohy, resp. definičnímu oboru rovnice a tak řešením úlohy je pouze číslo 40.

Příklad 3

Na sportovním kurzu vybíráme do závodu čtyřčlenné hlídky, v nichž má každý závodník svoji funkci – velitel, zdravotník, pokladník a kurýr. Kolika způsoby lze z 15 chlapců a 18 dívek sestavit takové hlídky, jestliže:

a) pro volbu hlídky neplatí žádná omezující pravidla
b) velitel hlídky musí být dívka
c) kurýr musí být chlapec
d) v hlídce mohou být nejvýše dvě dívky.

Řešení:

a) Pokud pro sestavení hlídky neplatí žádná omezující pravidla, pak vytváříme čtveřice, v nichž záleží na pořadí členů (každý plní jinou funkci), z 33 účastníků kurzu. Proto
$\boldsymbol{V(4,33) = 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = 982\,080}$ nebo
$\boldsymbol{V(4,33) = \frac{33!}{(33-4)!} = \frac{33!}{29!} = 982\,080}$

b) Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že velitel hlídky je dívka. Takovou hlídku lze sestavit $\boldsymbol{18 \cdot V(3,32) = 18 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = 535\,680}$ způsoby.

c) Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že kurýr musí být chlapec. Takovou hlídku lze sestavit $\boldsymbol{15 \cdot V(3,32) = 15 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 = 464\,400}$ způsoby.

d) Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že v hlídce mohou být nejvýše dvě dívky. To znamená buď žádná, jedna nebo dvě.
- žádná dívka $\boldsymbol{V(4,15) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32\,760}$ způsobů
- jedna dívka $\boldsymbol{4 \cdot 18 \cdot V(3,15) = 4 \cdot 18 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 196\,560}$ způsobů
- dvě dívky $\boldsymbol{6 \cdot V(2,18) \cdot V(2,15) = 6 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 14 = 385\,560}$ způsobů

Protože je splněné kombinatorické pravidlo součtu (každé dvě množiny hlídek jsou navzájem disjunktní), je výsledný počet možností pro sestavení hlídky $\boldsymbol{614\,880}$ způsobů.

Příklad 4

Kolik různých osmiciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 8?

Řešení:

Na pořadí cifer v čísle záleží, vybíráme všechny cifry a žádná se nemůže opakovat. Proto pro počet čísel platí: $\boldsymbol{P(8) = 8! = 40\,320.}$

Příklad 5

Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet?

Řešení:

Opět záleží na pořadí karet při míchání, vybíráme všechny karty a žádná karta se neopakuje. Proto pro počet míchání platí:

$\boldsymbol{P(32) = 32! = 2,631 \cdot 10^{35}}$**.**

Příklad 6

Kolika způsoby můžeme usadit dva chlapce a tři dívky na jednu lavičku,

a) jestliže pro jejich usazení neplatí žádné podmínky,
b) jestliže sedí vedle sebe oba chlapci a vedle nich všechny dívky?

Řešení:

a) Pokud pro usazení neplatí žádné omezující podmínky, pak je můžeme usadit $\boldsymbol{P(5) = 5! = 120}$ způsoby.
b) Dva chlapce vedle sebe můžeme usadit dvěma způsoby, tři dívky vedle nich posadíme $P(3) = 3! = 6$ způsoby, dohromady tedy $2 \cdot 6 = 12$ způsoby. Chlapci ale mohou sedět vpravo nebo vlevo od dívek a proto je počet pro usazení $\boldsymbol{12 \cdot 2 = 24}$ možností.

Úlohy k procvičení

1. Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 2, 3, 4 , 6, 9, a to každá nejvýše jednou.

   $[120]$
2. Z kolika prvků lze sestavit 992 variací druhé třídy bez opakování?

   $[32]$
3. Na sportovním kurzu vybíráme do závodu tříčlenná družstva, v nichž má každý závodník svoji funkci – velitel, zdravotník a kurýr. Kolika způsoby lze z 10 chlapců a 13 dívek sestavit takové družstvo, jestliže:

a) pro volbu družstva neplatí žádná omezující pravidla $[10\ 626]$
b) velitel družstva musí být chlapec $[4\ 620]$
c) zdravotník musí být dívka $[6\ 006]$
d) v družstvu mohou být nejvýše dva chlapci. $[9\ 906]$

4. Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do řady při nástupu na tělocvik? $[20!]$

5. Kolika způsoby lze postavit do řady na poličku 5 různých českých knih a 3 různé francouzské knihy tak, že všechny české budou vedle sebe a všechny francouzské budou vedle sebe?

   $[2 \cdot 5! \cdot 3! = 1\ 440]$

Skupiny s opakováním

Příklad 1

Určete, kolik různých sedmiciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 0,1,2,3,

a) má-li se v každém z nich opakovat číslice 0 třikrát, číslice 1 jednou, číslice 2 dvakrát a číslice 3 jednou
b) má-li se v každém z nich opakovat číslice 1 čtyřikrát, číslice 2 jedenkrát a na místě jednotek a desítek budou nuly.
c) Kolik číslic můžeme získat, zaměníme-li pořadí číslic v čísle 122 338?

Řešení:

a) Jedná se o permutace s opakováním. Vytváříme uspořádané sedmice (k= 7), ve kterých je k_1= 3, k_2= 1, k_3= 2 a k_4= 1. Hledaný počet čísel určíme

$$\boldsymbol{P'}(3, 1, 2, 1) = \frac{(3+1+2+1)!}{3!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = \mathbf{420}$$

b) Opět se jedná o permutace s opakováním, vytváříme uspořádané sedmice. Nyní si však na místě jednotek a desítek „zafixujeme“ číslice 0 a budeme hledat uspořádané pětice, ve kterých se vyskytuje číslice 1 čtyřikrát a číslice 2 jedenkrát. Proto

$$\boldsymbol{P'}(4, 1) = \frac{(4+1)!}{4!\cdot 1!} = \frac{5!}{4!} = \mathbf{5}$$

c) Opět se jedná o permutace s opakováním, nyní vytváříme uspořádané šestice (k=6), ve kterých je k_1=1, k_2=2, k_3=2 a k_4=1. Hledaný počet čísel určíme

$$\boldsymbol{P'}(1, 2, 2, 1) = \frac{(1+2+2+1)!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{6!}{2\cdot 2} = \mathbf{180}$$

Příklad 2

Kolik různých telefonních stanic lze napojit na tel. ústřednu, jestliže jsou všechna čísla stanic šesticiferná a na 1. místě může být i 0? Jak se změní výsledek, jestliže se na 1. místě 0 nepřipouští? Jak se změní výsledek, budou-li telefonní čísla sedmimístná a na 1. místě 0 nepřipouštíme?

Řešení:

a) V tomto případě se jedná o variace s opakováním. Vytváříme uspořádané šestice z 10 prvků (k dispozici máme 10 číslic) a číslice se mohou v čísle opakovat. Protože připouštíme na 1. místě číslici 0, je hledaný počet

$\boldsymbol{V'}(6, 10) = 10^6 =$ **1 000 000** (připouštíme tím také telefonní číslo 000 000)

b) Nyní se také jedná o variace s opakováním, ale na 1. místě můžeme „vystřídat“ jen 9 číslic – číslici 0 zde nepřipouštíme. Dále vytváříme uspořádané pětice. Proto

$9\cdot\boldsymbol{V'}(5, 10) = 9\cdot 10^5 =$ **900 000**

c) Jde o podobnou úlohu, jako byl případ b), jen s tím rozdílem, že telefonní čísla jsou sedmimístná. Proto

$9\cdot\boldsymbol{V'}(6, 10) = 9\cdot 10^6 =$ **9 000 000**

Úlohy k procvičení

1. Určete, kolik různých slov (bez ohledu na jejich význam), lze sestavit z písmen slova ABRAKADABRA, jestliže
   a) jsou použita všechna
   b) písmeno K bude na konci slova
   c) všechna A nesmí být vedle sebe.

$$[a)\ 83\ 160; b)\ 7\ 560; c)81\ 900]$$

2. Určete, kolik je všech možných SPZ aut, které se skládají ze tří písmen abecedy A – Z, za nimiž následují čtyři číslice 0 – 9? Jak se změní počet SPZ, zvýší-li se počet písmen na 4 a počet číslic klesne na 3? Kolik SPZ můžeme sestavit jen z 6 číslic a žádných písmen? (počítejte s tím, že písmen abecedy je 22).

$$[a)\ 106\ 480\ 000; b)\ 234\ 256\ 000; c)\ 1\ 000\ 000\ ]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CALDA, Emil a DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-365-3.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.
SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.