INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

PODOBNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ (včetně stejnolehlosti)

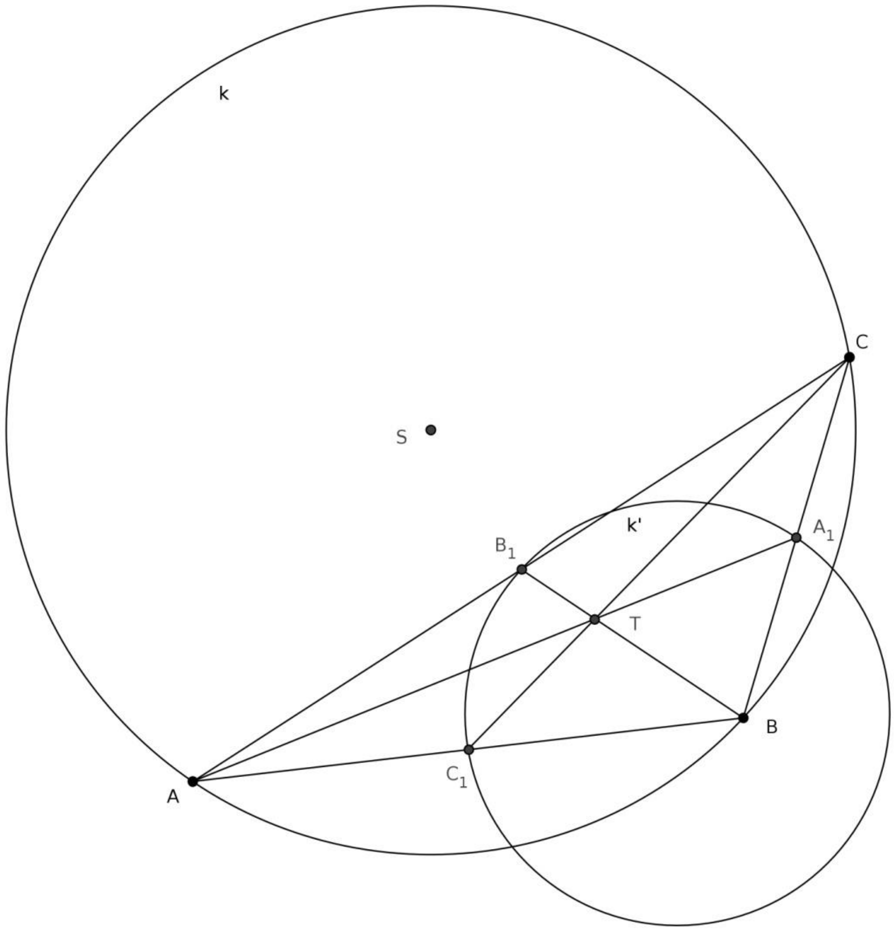
Autor	Ondřej Chudoba
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	11. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16–19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí použít znalosti podobných zobrazení včetně stejnolehlosti k řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Narýsujte libovolný trojúhelník *ABC*. Sestrojte těžiště *T* a kružnici *k* trojúhelníku opsanou. Zobrazte kružnici *k* ve stejnolehlosti *H*(*T*, -1/2). Kterými body trojúhelníku *ABC* kružnice *k'* prochází?

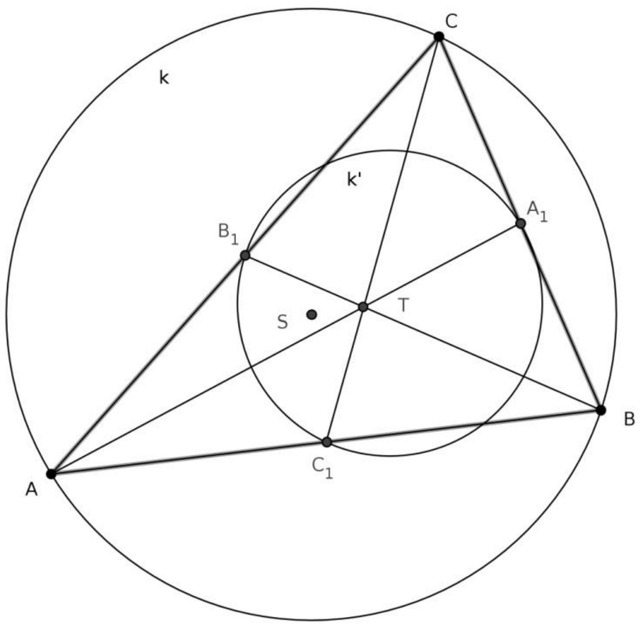
Řešení:

Narýsujeme libovolný trojúhelník. Sestrojíme osy stran a z jejich průsečíku kružnici opsanou. Dále nalezneme těžiště trojúhelníka a sestrojíme kružnici *k'* v zadané homotetii. Situace je narýsována na obr. 2 pro obecný ostroúhlý trojúhelník a na obr. 1 pro obecný tupoúhlý trojúhelník.



obr. 1

Rýsujeme-li správně, vyjde nám, že kružnice *k'* prochází body A_1, B_1, C_1, což jsou po řadě středy stran *BC*, *CA*, *AB*.



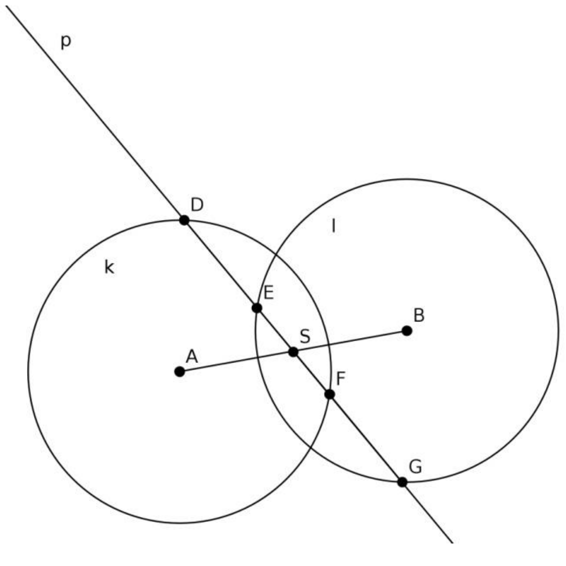
obr. 2

2) Jsou dány dvě kružnice se stejným poloměrem *k*(*A*,*r*), *l*(*B*,*r*), které se protínají. Bod *S* je středem úsečky *AB*. Veďte bodem *S* přímku *p* tak, aby její průsečíky s kružnicemi *k, l* byly krajními body tří shodných úseček.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 3). Obrazem kružnice *k* ve stejnolehlosti *H*(*S*,-3) je kružnice *k'*, která protne kružnici *k* ve dvou bodech *D, D'*. Body *D* a *S* potom leží na hledané přímce *p*. Úsečky *DE, EF, FG* jsou potom hledané úsečky o totožné délce. Z těchto úvah plyne postup konstrukce. Je zřejmé, že pokud |*AS*| = *r*, potom má úloha triviální řešení, kdy hledané tři úsečky mají nulovou délku. Pokud |*AS*| < *r*, potom má úloha dvě různá řešení. Pokud |*AB*| < *r,* potom úloha nemá řešení, totiž kružnice *k* a *k'* pak mají prázdný průnik.



obr. 3

Popis konstrukce.

1, $k'; H(S, -3): k \longrightarrow k'$

2, $D; D = k \cap k'$

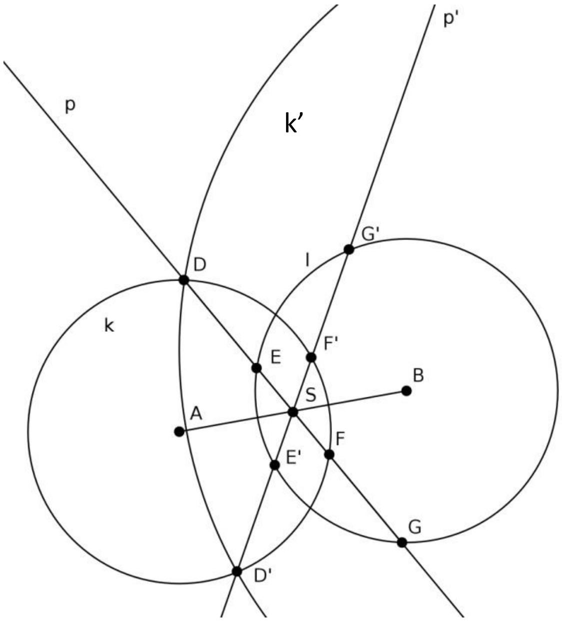
3, $p; D \in p, S \in p$

4, E, F, G; $\{E, F, G\} = p \cap (k \cup k')$

5, DE, EF, FG

Konstrukce.

Druhé řešení je označeno stejnými písmeny s čárkou.



obr. 4

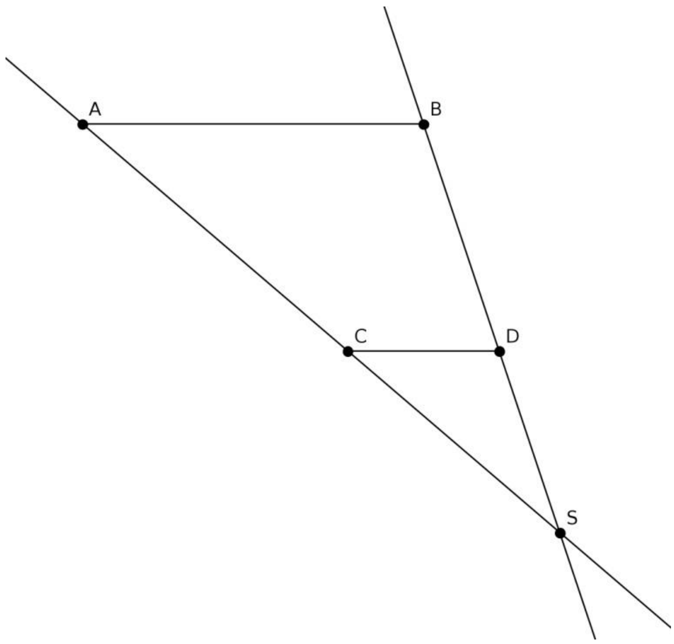
Diskuse.

$\|AS\| = r$	1 řešení
$\|AS\| < r$	2 různá řešení
$\|AB\| < r$	žádné řešení

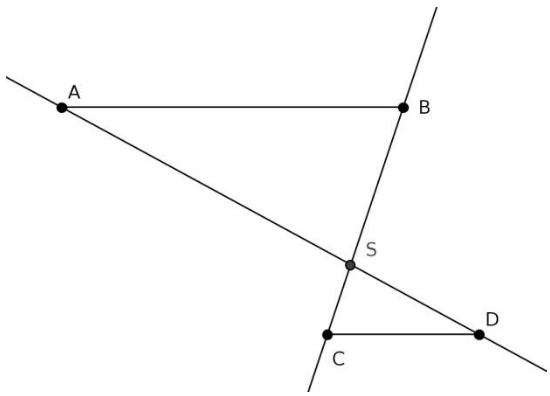
3) Jsou dány úsečky *AB*, *CD*, přičemž |*AB*| ≠ |*CD*| a *AB* || *CD*. Určete podobné zobrazení, v němž je úsečka *CD* obrazem úsečky *AB*.

Řešení:

Je vhodné si situaci nakreslit. Viz obr. 5. Jedná se o stejnolehlost. Jejím středem je průsečík přímek *AC* a *BD*. Koeficient stejnolehlosti je |*SA*|/|*SC*|. Druhá možnost (obr. 6): středem stejnolehlosti je průsečík přímek *AD* a *BC*. Koeficient této stejnolehlosti je potom –|*SD*|/|*SA*|.



obr. 5

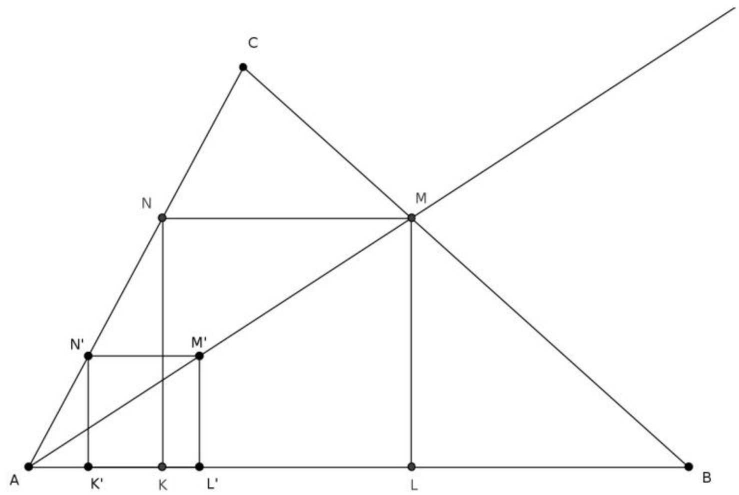


obr. 6

4) Je dán ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Vepište do něj čtverec *KLMN* tak, aby strana *KL* ležela na straně *c*, bod *N* na straně *b* a bod *M* na straně *a*.

Řešení:

Předpokládejme, že úloha má řešení a je vyřešena (viz obr. 7). Čtverec *K´L´M´N´* splňuje zadání až na to, že bod *M´* neleží na straně *a*. Ve stejnolehlosti se středem *A* a koeficientem |*AM*|/|*A´M´*| přejde tento čtverec ve čtverec *KLMN*, který již zadání splňuje bez výhrady. Odtud plyne postup konstrukce: nejprve do trojúhelníka narýsujeme čtverec *K´L´M´N´* podobně jako v obr. 7. Potom polopřímka *AM´* protne stranu a v bodě *M*.



obr. 7

Popis konstrukce.

1, $K'L'M'N'$; $K'L'$ leží na straně c, N' leží na str. b a bod M' leží uvnitř trojúhelníka ABC

2, AM'

3, M; $M \in AM' \cap BC$

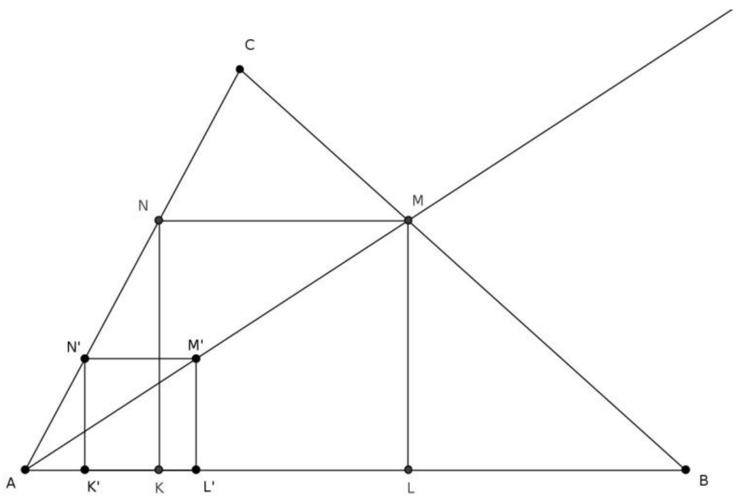
4, K; $H\left(A, \frac{|AM|}{|AM'|}\right): K' \to K$

5, L; $H\left(A, \frac{|AM|}{|AM'|}\right): L' \to L$

6, N; $H\left(A, \frac{|AM|}{|AM'|}\right): N' \to N$

7, čtverec $KLMN$

Konstrukce.



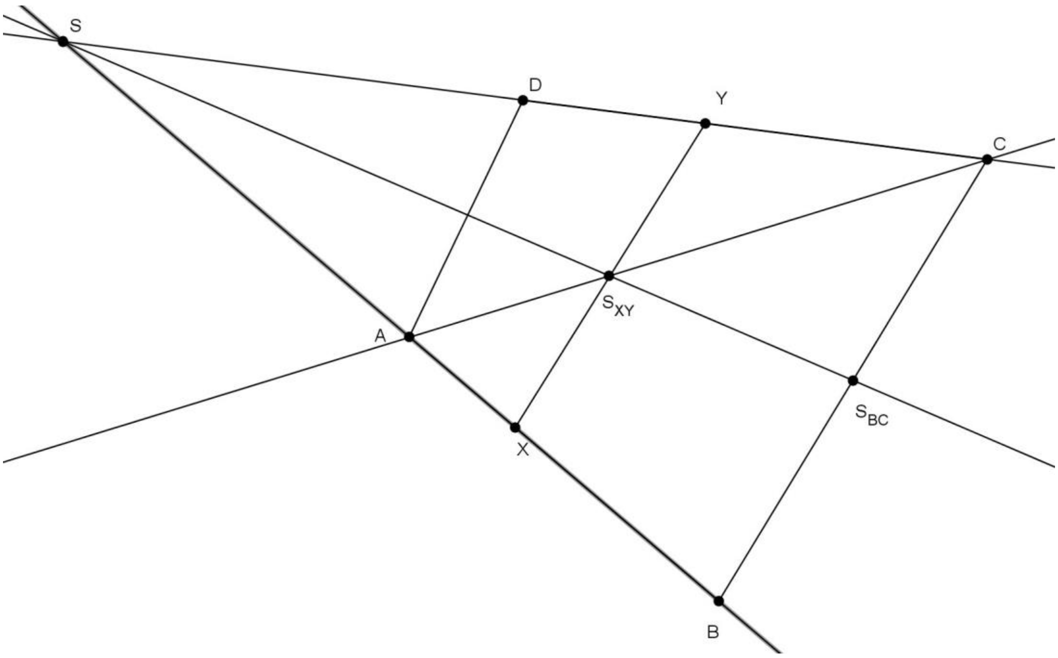
obr. 8

5) Je dán čtyřúhelník *ABCD*. Na polopřímce *AB* sestrojte bod *X* a na polopřímce *CD* bod *Y* tak, aby přímka *XY* a *BC* byly rovnoběžné a aby přímka *AC* půlila úsečku *XY*.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení a je vyřešena (viz obr. 9). Označme S průsečík přímek AB a CD. Zřejmě platí $XY \parallel BC$, to znamená, že přímky XY a BC jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem S a nějakým koeficientem k. Z obrázku vyplývá, že $k = |SS_{XY}|/|SS_{BC}|$.



obr. 9

Popis konstrukce.

1, čtyřúhelník *ABCD*

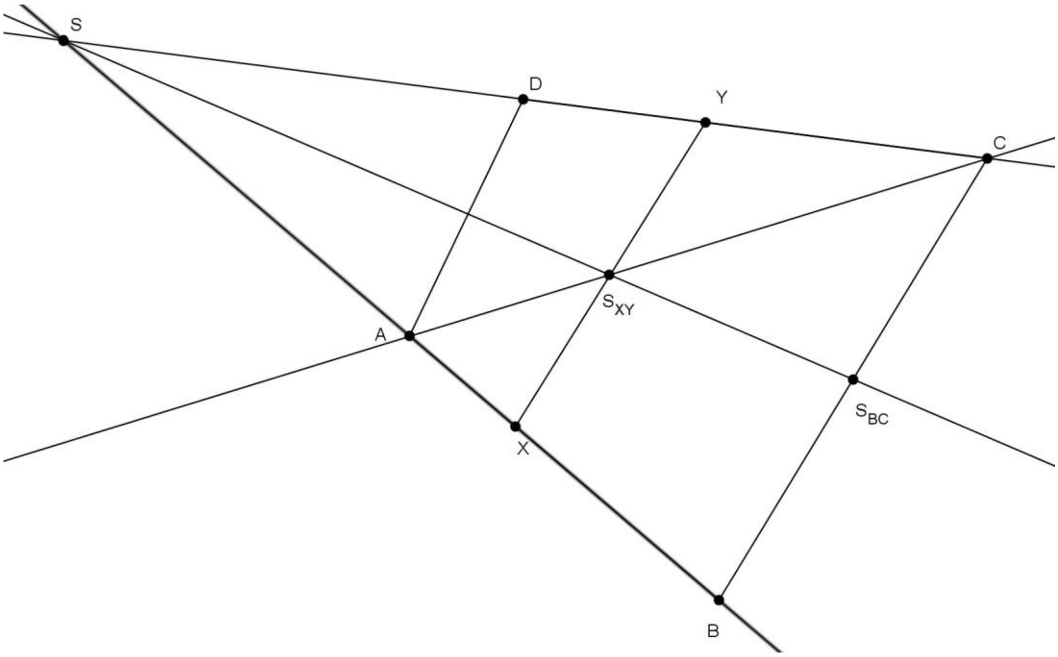
2, $S; S \in AB \cap CD$

3, S_{BC}

4, $S_{XY}; S_{XY} \in AC \cap SS_{BC}$

5, $XY; H\left(S, \frac{|SS_{XY}|}{|SS_{BC}|}\right): BC \rightarrow XY$

Konstrukce.



obr. 10

Diskuse.

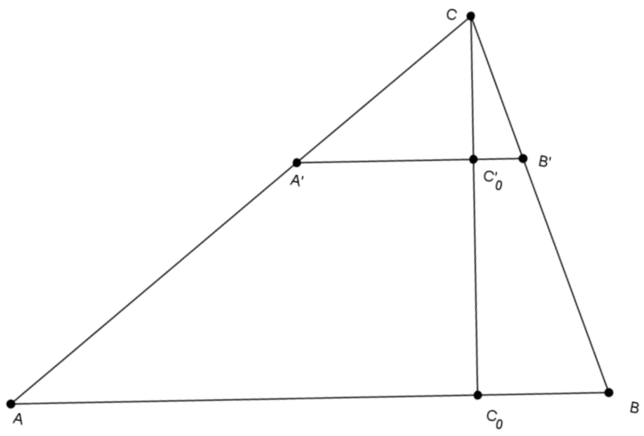
Úloha má 1 řešení.

6) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno |*AC*|:|*BC*| = 3:2, γ = 70°, v_c = 5 cm.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení a je vyřešena (viz obr. 11). Trojúhelník *A´B´C* má délku strany *A´C* 3 cm a *B´C* 2 cm, můžeme jej tedy narýsovat podle věty *sus*. Trojúhelník *ABC* je obrazem trojúhelníka *A´B´C* ve stejnolehlosti se středem *C* a koeficientem $|CC_0|/|CC_0'|$. Nejprve tedy narýsujeme trojúhelník *A´BC´*. A potom pomocí zmíněné stejnolehlosti nalezneme body *A* a *B*.



obr. 11

Popis konstrukce.

1, $A'B'C$; podle věty sus, viz rozbor

3, n; n je kolmá na $A'B'$, bod C leží na n

4, C'_0; $C'_0 \in n \cap A'B'$

5, k; $k(C, 5\text{ cm})$

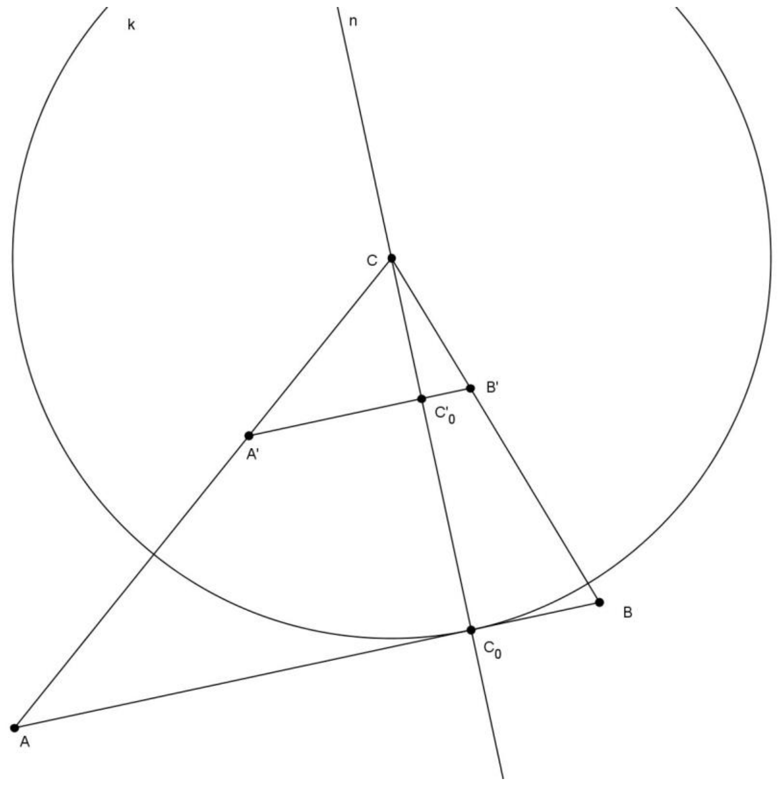
6, C_0; $C_0 \in k \cap n$

7, A ; $H\left(C, \frac{|CC_0|}{|CC'_0|}\right): A' \rightarrow A$

8, B; $H\left(C, \frac{|CC_0|}{|CC'_0|}\right): B' \rightarrow B$

9, trojúhelník ABC

Konstrukce.



obr. 12

Úlohy k procvičení:

1. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a:b:c$ = 7:4:5, v_b = 4 cm.

   [Návod: Sestrojte pomocný trojúhelník $A'B'C'$, kde $|A'B'|$ = 5 cm, $|B'C'|$ = 7 cm a $|A'C'|$ = 4 cm. Užijte stejnolehlost se středem v bodě B'.]

2. Jsou dány kružnice $k(S_1, r_1)$ a $l(S_2, r_2)$. Sestrojte společné tečny těchto kružnic ($|S_1S_2| > r_1 + r_2$).

   [Návod: Uvažujte stejnolehlost, kdy se jedna kružnice zobrazí na druhou.]

3. Vrchol A trojúhelníku ABC leží mimo nákresnu. Určete střed strany AB.

   [Návod: Zvolte pomocnou úsečku $A'B' \parallel AB, A' \in CA, B' \in CB$ a sestrojte její střed O', užijte stejnolehlosti se středem v bodě C.]

4. Do kružnice $k(S$,4 cm) vepište obdélník $ABCD$, pro který platí $|AB|:|BC|$ = 3:4.

   [Návod: Užijte stejnolehlosti se středem v bodě S.]

5. Je dán čtverec $ABCD$ se středem S. Určete poměr podobnosti, která zobrazuje body A, B, S po řadě na body B, D, C.

   [$k = \sqrt{2}$]

6. Je dán ostrý úhel AVB a bod M, který leží uvnitř úhlu AVB. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky KLM, pro něž platí: vrchol L leží na polopřímce VB, vrchol K na polopřímce VA, přičemž $|LK| = |KM|$ a LK je kolmá na VA.

   [Návod: Řešte užitím stejnolehlosti se středem V. Pokud je úhel AVB menší než 45°, úloha má 2 řešení, pokud je jeho velikost 45° a více a zároveň menší než 90°, úloha má 1 řešení.]

7. Do půlkruhu s průměrem AB vepište čtverec $KLMN$ tak, aby strana KL ležela na úsečce AB a další dva vrcholy M, N na dané půlkružnici.

   [Návod: Sestrojte libovolný čtverec $K'L'M'N'$ tak, aby strana $K'L'$ ležela na úsečce AB a přitom střed S úsečky AB byl i středem strany $K'L'$. Použijte stejnolehlost se středem S. Úloha má vždy jediné řešení.]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-358-5.