INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

KONSTRUKČNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ UŽITÍM MNOŽIN BODŮ

Autor	Ondřej Chudoba
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	4. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16–19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí najít řešení úlohy nalezením množin bodů daných vlastností
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

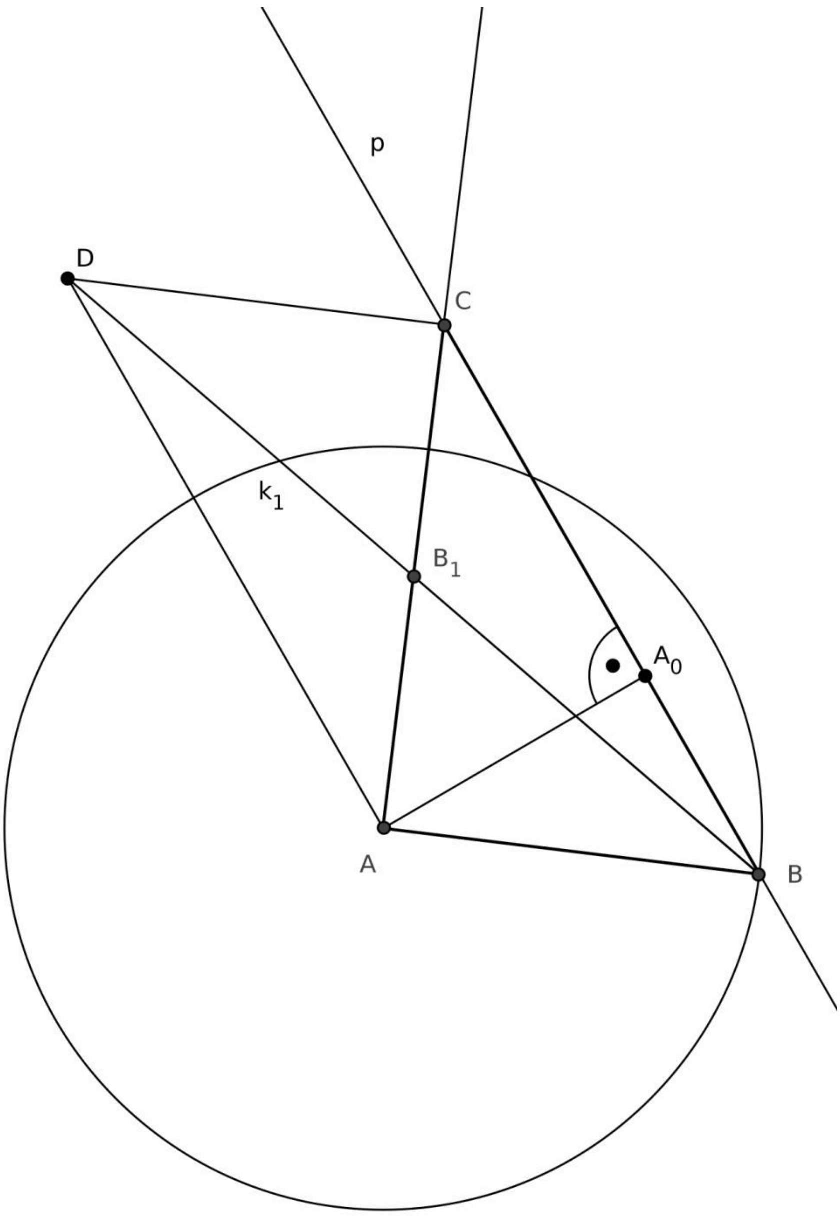
Řešené příklady:

1) Je dána úsečka AA_0 ($|AA_0| = 4$ cm). Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, pro které platí $c = 5$ cm, $t_b = 6$ cm, AA_0 je těžnice na stranu *a*.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 1).



obr. 1

Bod *B* je od bodu *A* vzdálen 5 cm a leží na přímce, která je kolmá k úsečce AA_0 a prochází bodem A_0. Je tedy společným bodem množin bodů splňujících dané podmínky. Dle označení v obr. 1 tedy $B = k_1 \cap p$. Odtud plynou hlavní body konstrukce:

1, p; p je kolmá na AA_0 a prochází bodem A_0

2, k_1; $k_1(A, 5 \text{ cm})$

3, $B; B = p \cap k_1$

4, D; doplníme na rovnoběžník $ABCD$, bod B_1 je průsečík jeho úhlopříček a také střed AC

5, $D; D = k_2 \cap q$

6, $C; C$ je průsečíkem polopřímky AB_1 a přímky p

Popis konstrukce.

1, $AA_0; |AA_0| = 4$ cm

2, $p; p \perp AA_0, A_0 \in p$

3, $k_1; k_1(A, 5$ cm$)$

4, $B; B = p \cap k_1$

5, $q; q \parallel p, A \in q$

6, $k_2; k_2(B, 12$ cm$)$

7, $D; D = k_2 \cap q$

8, $B_1; B_1$ je střed BD

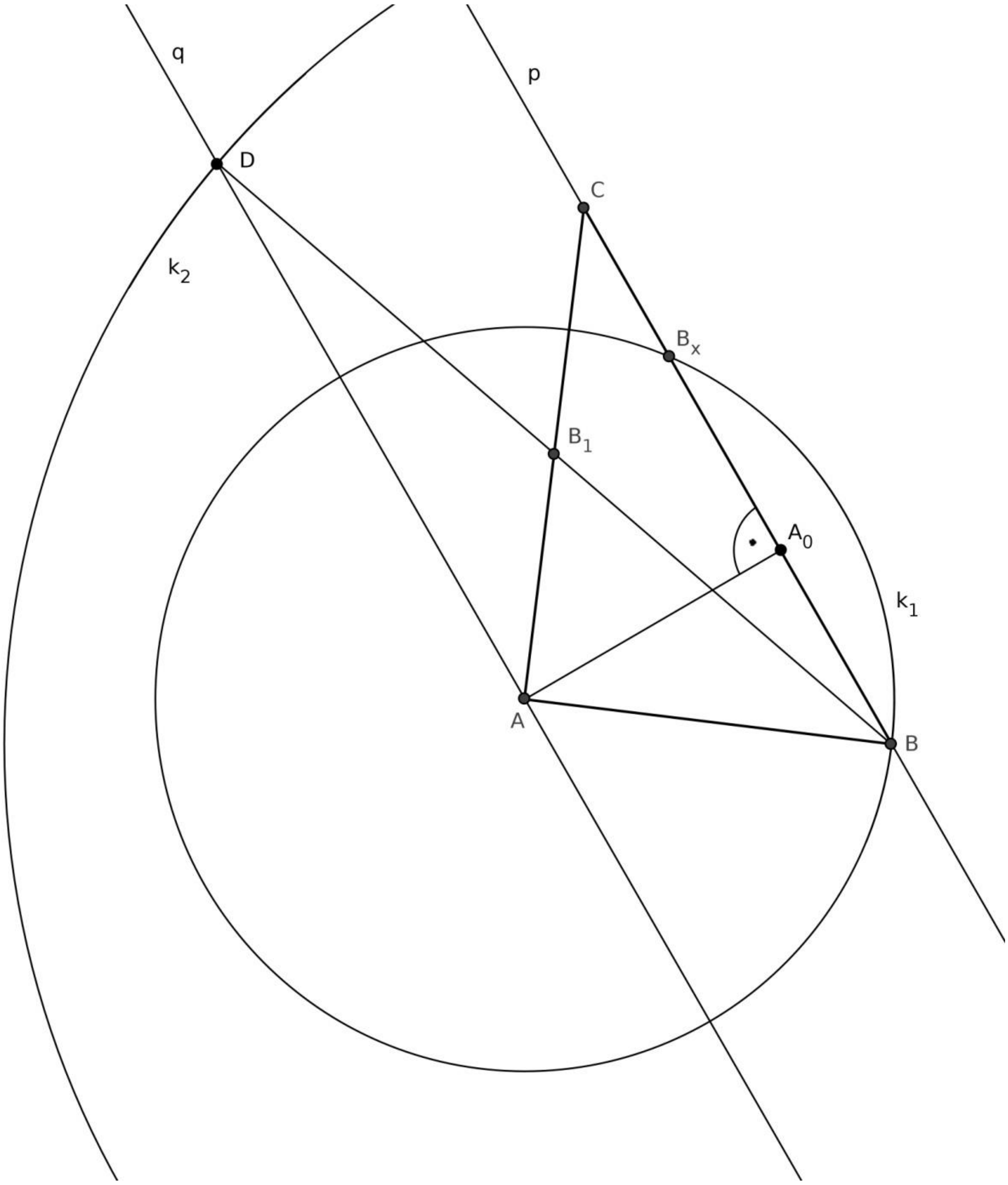
9, $\mapsto AB_1$

10, $C; C = p \cap AB_1$

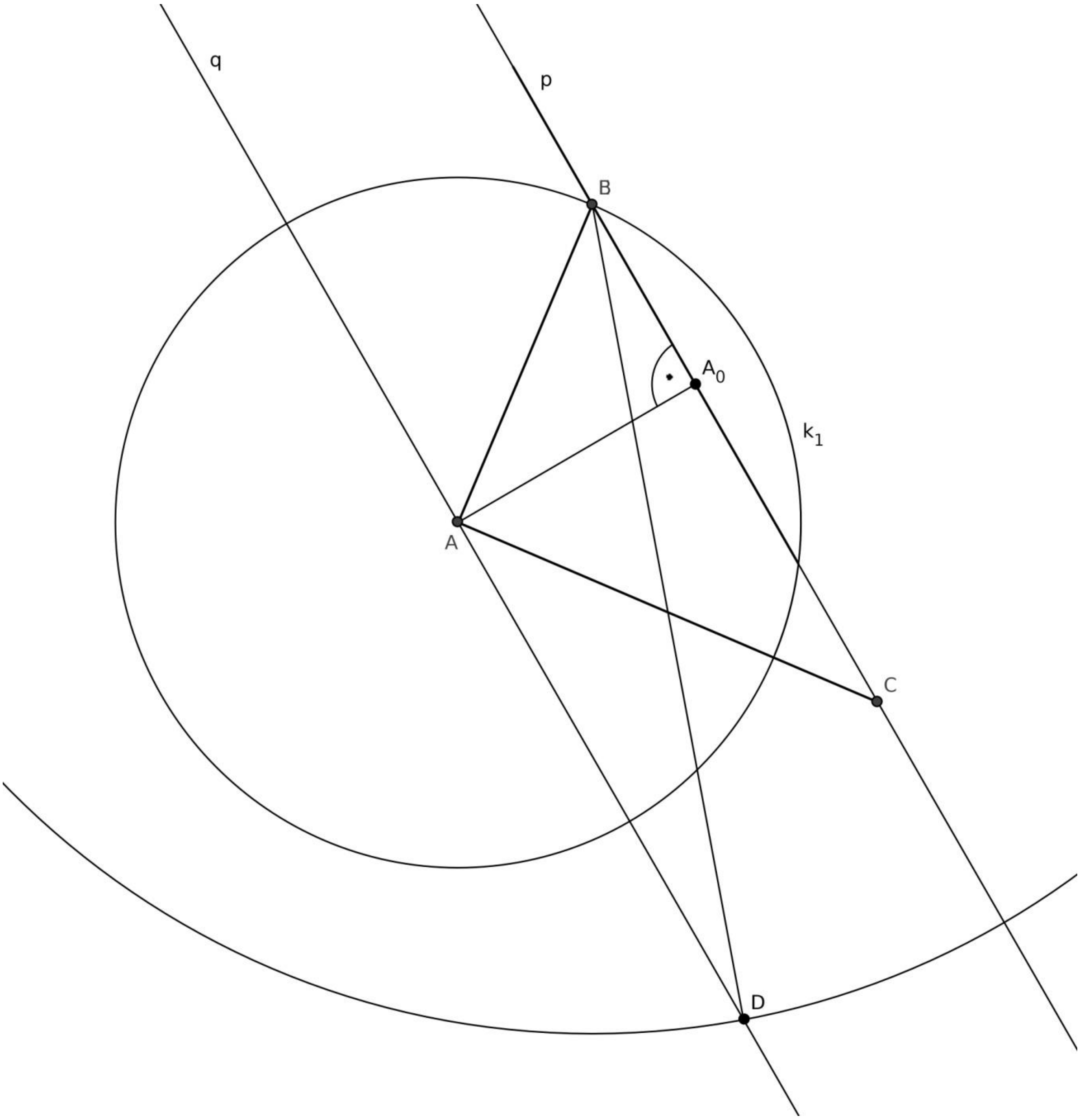
11, $\triangle ABC$

Konstrukce.

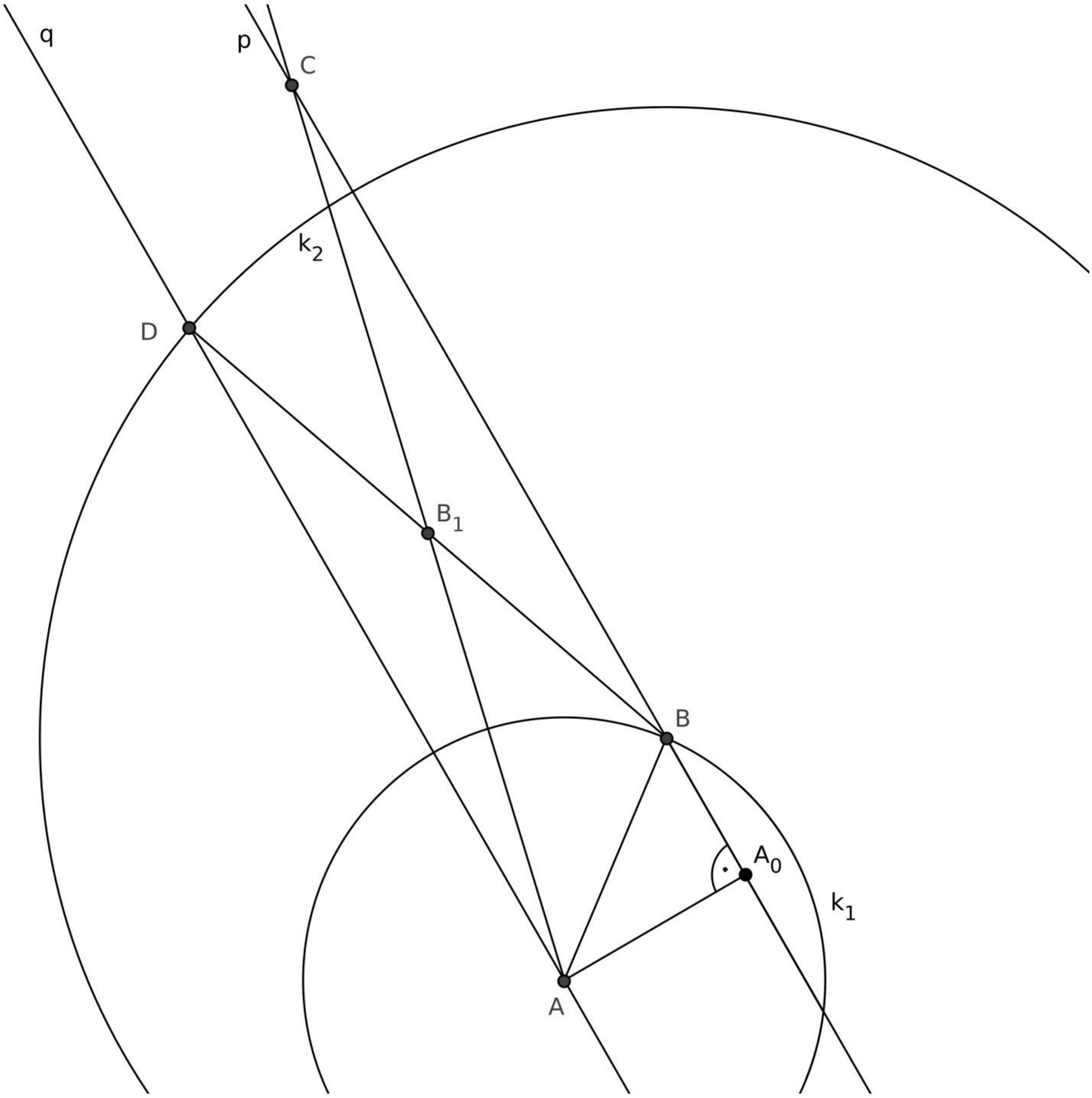
Při rýsování kružnice k_1 obdržíme 2 průsečíky s přímkou p – tedy 2 body B. Z každého tohoto bodu B potom rýsujeme kružnici k_2, která protne přímku q ve 2 bodech, což jsou 2 body D. Úloha má tedy 4 řešení. Obrázky jsou samostatně pro každou ze čtyř situací.



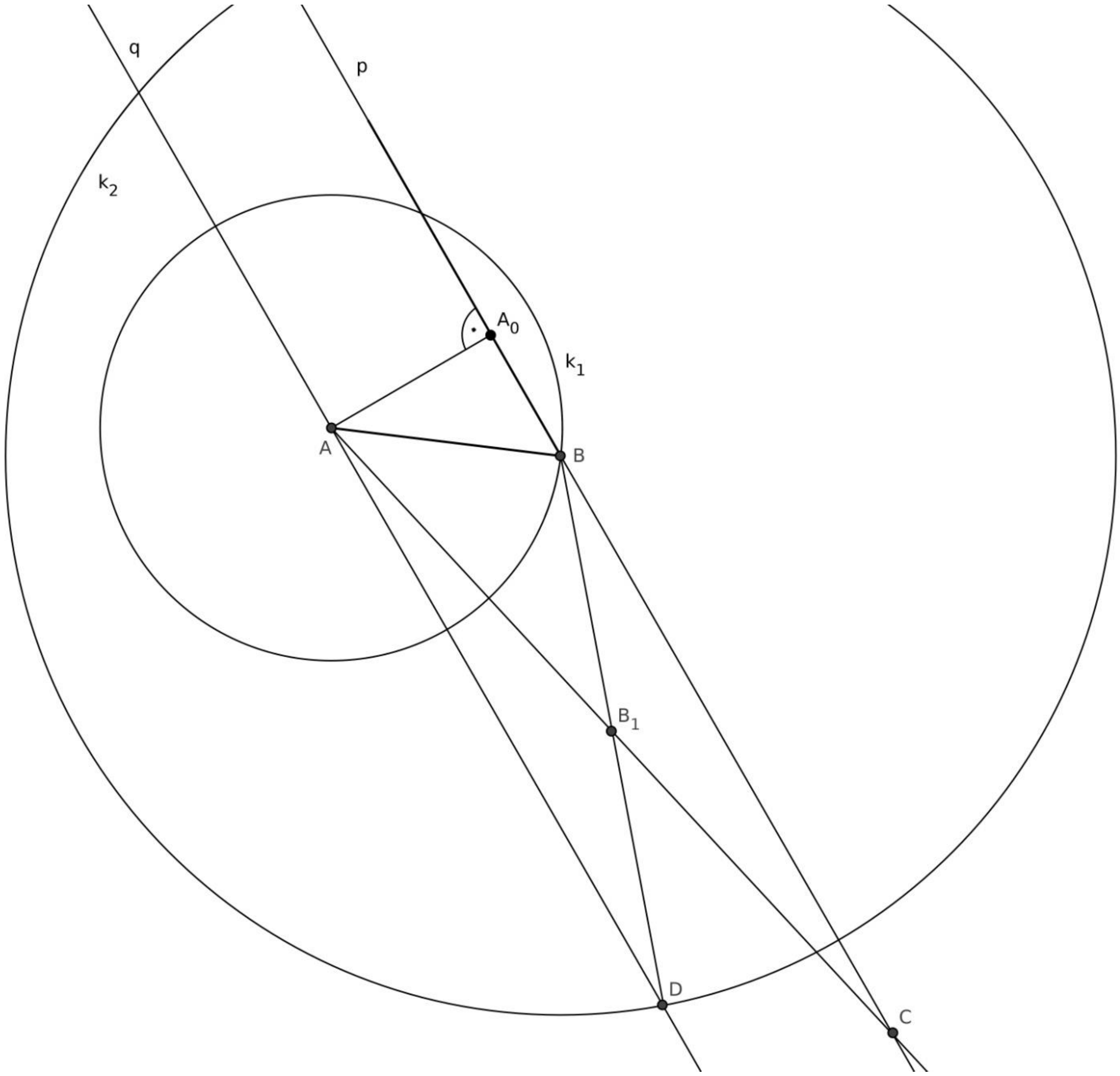
obr. 2a



obr. 2b



obr. 2c



obr. 2d

Diskuse.

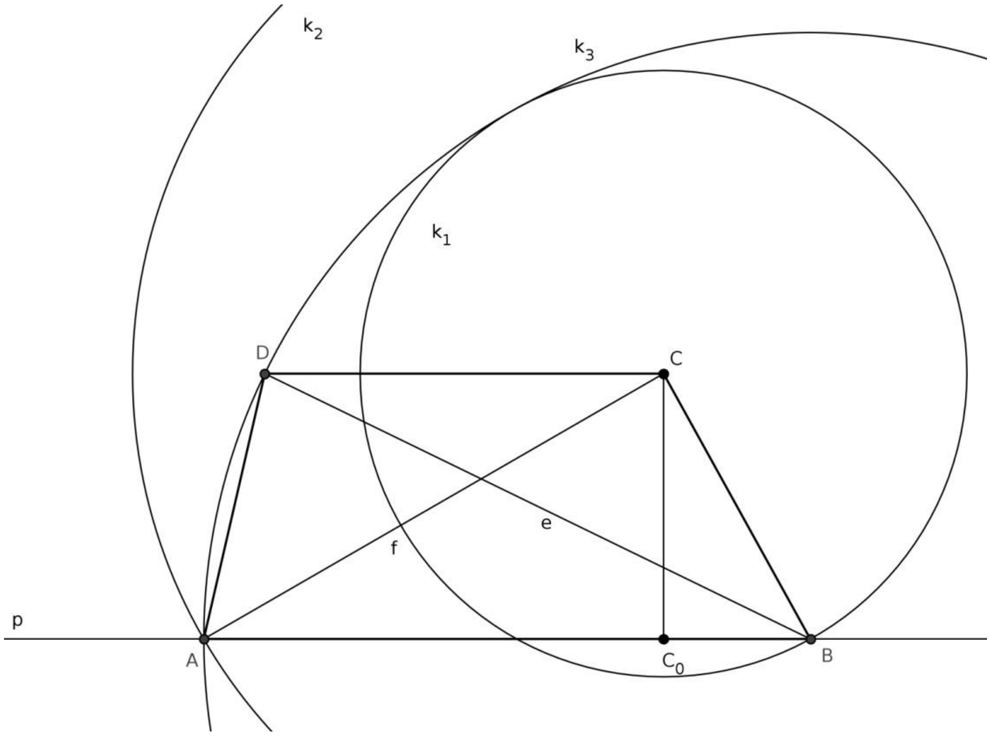
Úloha má 4 řešení.

2) Sestrojte lichoběžník *ABCD* (*AB* || *CD*), pro který platí *b* = 4 cm, *v* = 3,5 cm, *e* = 8 cm, *f* = 7 cm. Nechť *e* značí úhlopříčku z bodu *B* a *f* úhlopříčku z bodu *A*.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 3).



obr. 3

Bod B je od bodu C vzdálen 4 cm a leží na přímce, která je kolmá k úsečce CC_0 a prochází bodem C_0. Dle označení v obr. 3 tedy platí $B = k_1 \cap p$. Bod A je od bodu C vzdálen 7 cm a leží také na přímce p. Dle označení v obr. 3 tedy platí $A = k_2 \cap p$. Bod D je od bodu B vzdálen 8 cm a leží na přímce, která je rovnoběžná s p a prochází bodem C. Dle označení v obr. 3 tedy platí $D = k_3 \cap q$. Z těchto úvah vyplývá postup konstrukce.

Popis konstrukce.

1, $CC_0; |CC_0| = 3{,}5$ cm

2, $p; p \perp CC_0, C_0 \in p$

3, $k_1; k_1(C, 4\text{ cm})$

4, $B; B = p \cap k_1$

5, $k_2; k_2(C, 7\text{ cm})$

6, $A; A = k_2 \cap p$

7, $k_3; k_3(B, 8\text{ cm})$

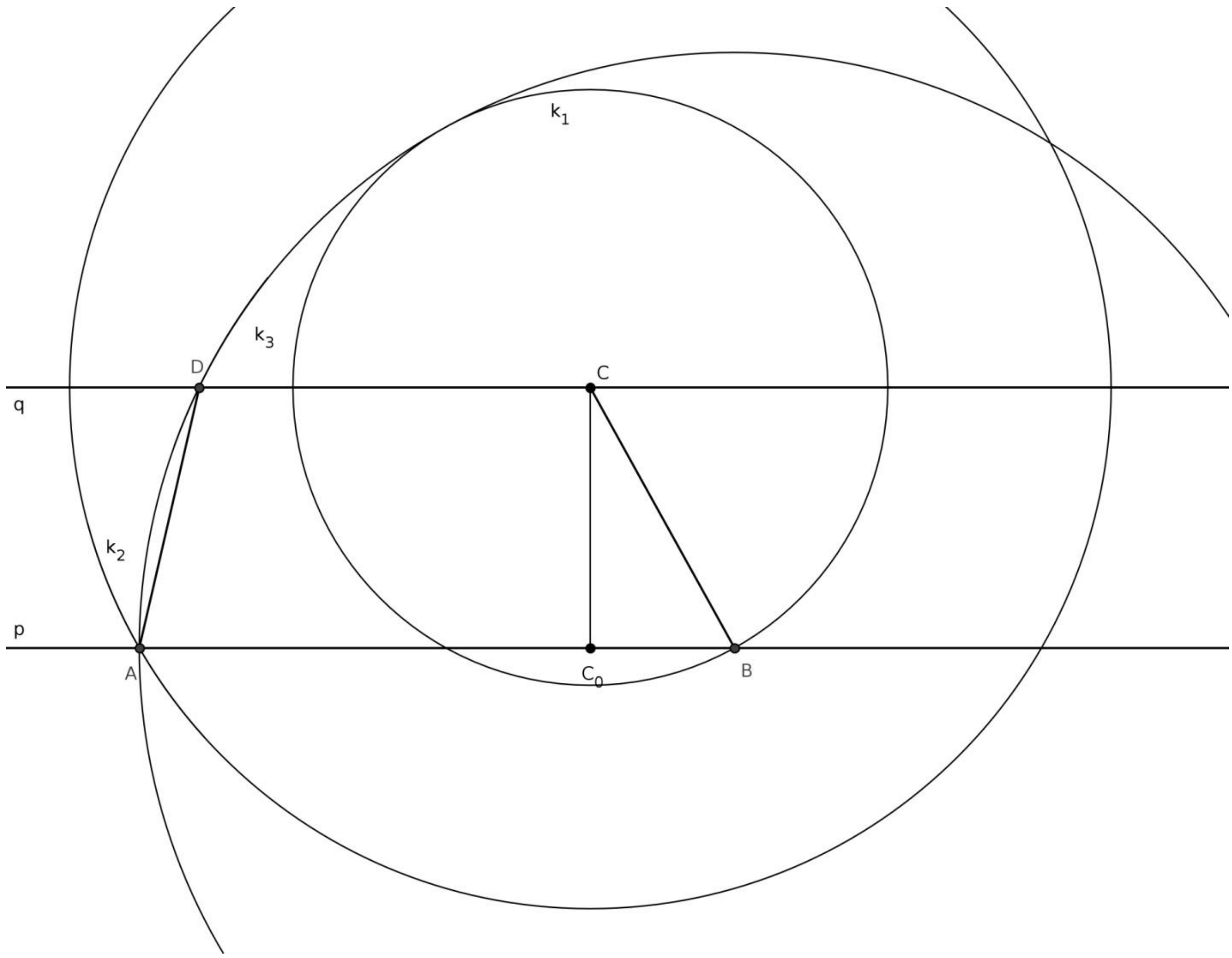
8, $q; q \parallel p, C \in q$

9, $D; D = k_3 \cap q$

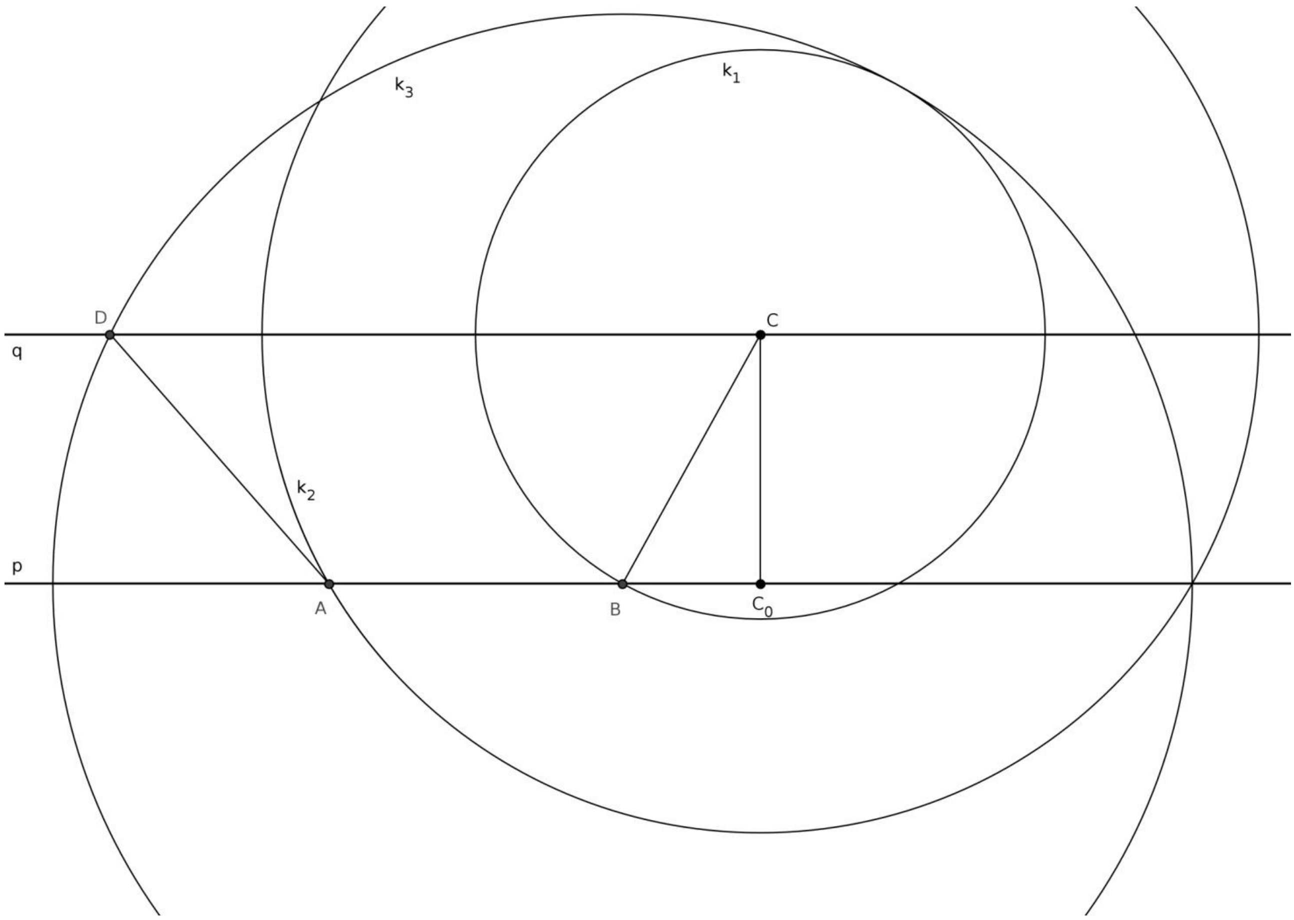
10, lichoběžník $ABCD$

Konstrukce.

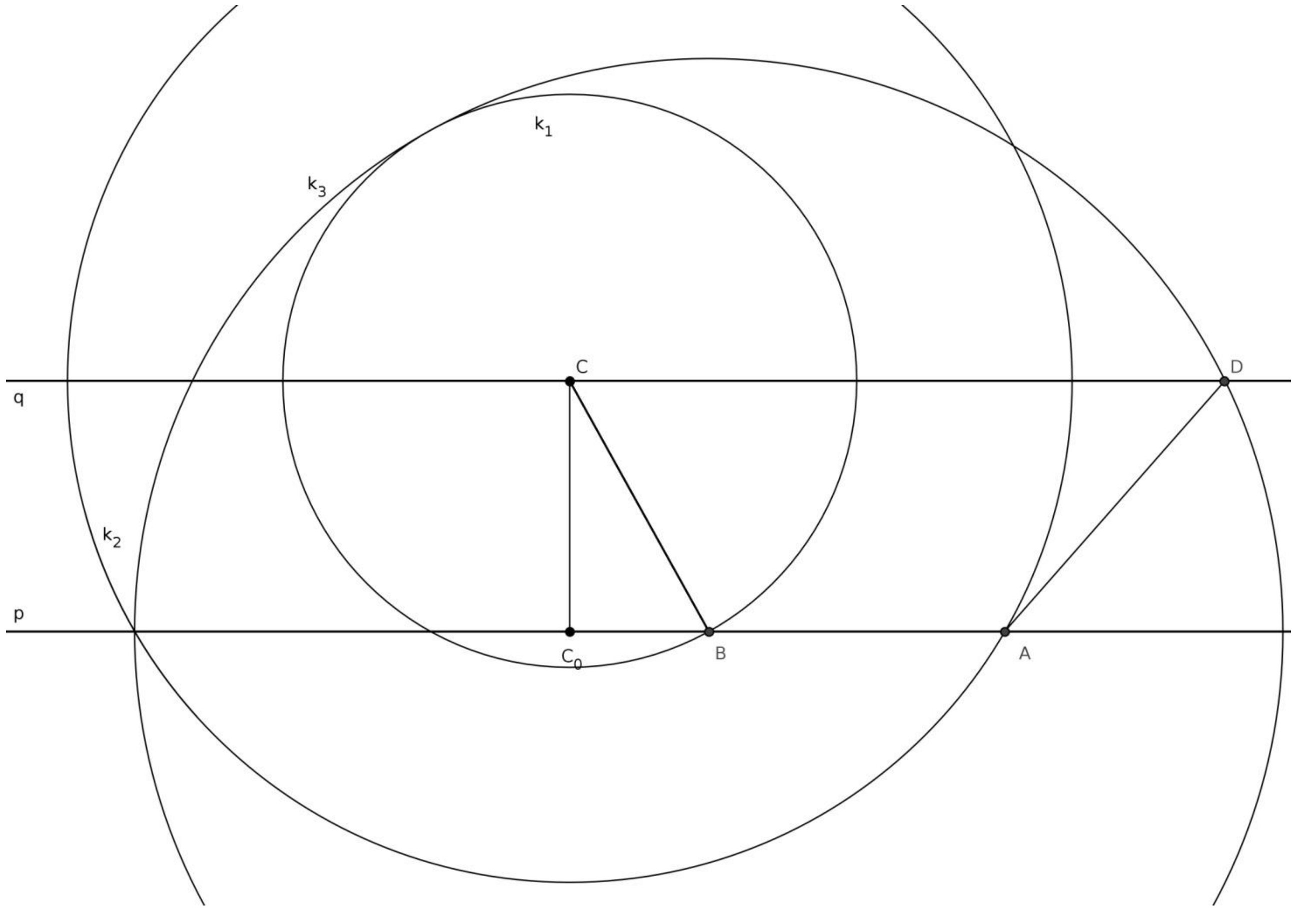
Úloha má tedy 4 řešení (obr. 4a až 4d).



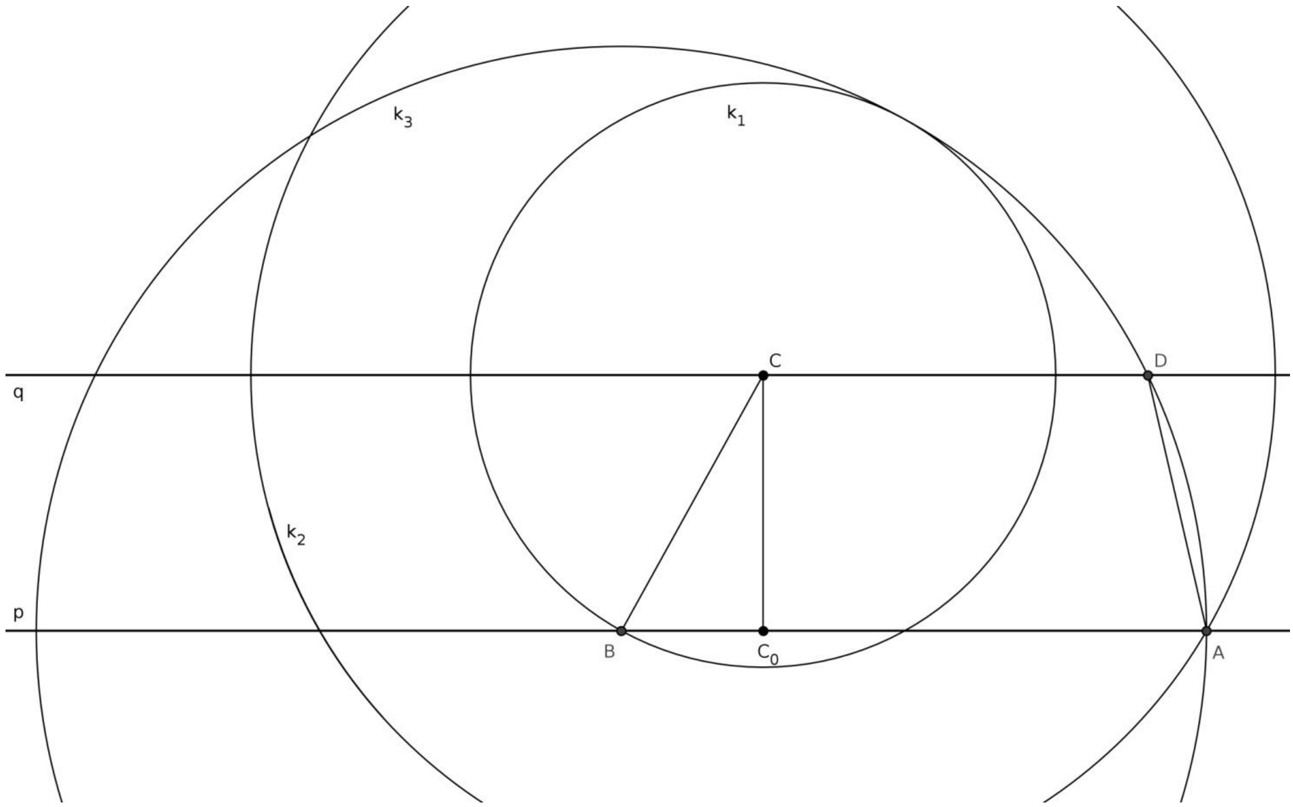
obr. 4a



obr. 4b



obr. 4c



obr. 4d

Diskuse.

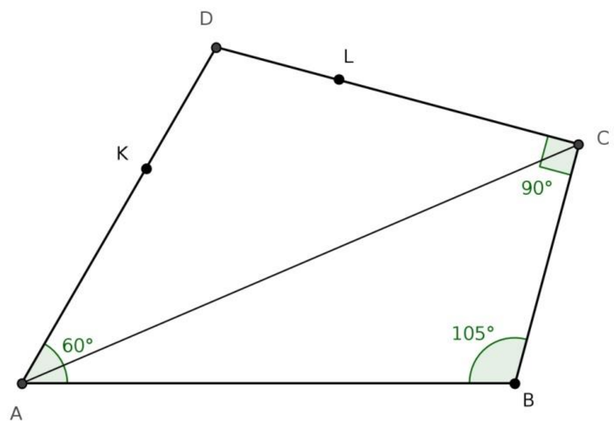
Úloha má 4 řešení.

3) Sestrojte čtyřúhelník *ABCD,* je-li dáno *a* = 6,5 cm, *α* = 60 °, *γ* = 90 °, *δ* = 105°, *e* = 8 cm.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 5).



obr. 5

Trojúhelník *ABC* je zadán podle věty *Ssu*, totiž velikost úhlu *β* si lze snadno dopočítat: *β* = 360 ° - (*α* + *γ* + *δ*) = 105°. Bod *D* je společným bodem ramen úhlů *BAK* a *BCL*, přičemž $|\measuredangle BAK| = \alpha$, $|\measuredangle BCL| = \gamma$. Tedy $D = \mapsto AK \cap \mapsto CL$. Z těchto úvah vyplývá postup konstrukce.

Popis konstrukce.

1, $AB; |AB| = 6{,}5$ cm

2, $\measuredangle ABX;\ |\measuredangle ABX| = 105°$

3, $k_1; k_1(A, 8$ cm$)$

4, $C; C = \mapsto BX \cap k_1$

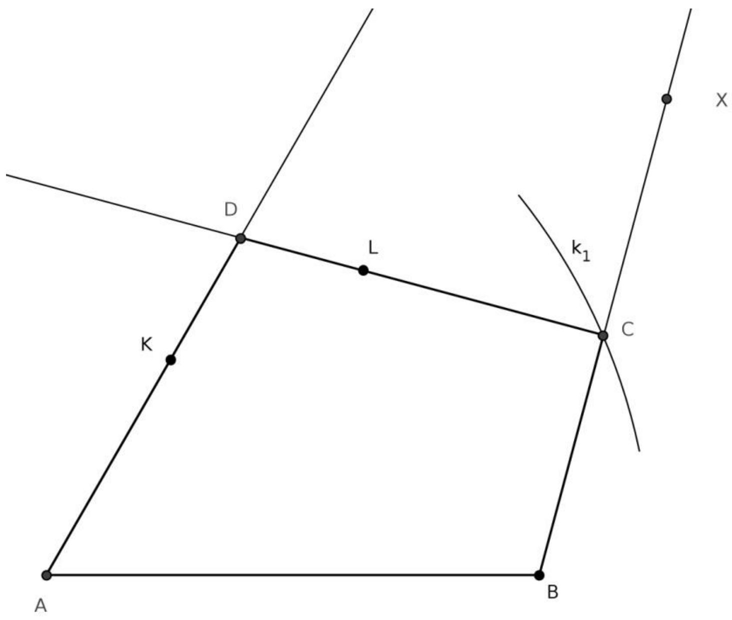
5, $\measuredangle BAK;\ |\measuredangle BAK| = 60°$

6, $\measuredangle BCL;\ |\measuredangle BCL| = 90°$

7, $D; D = \mapsto AK \cap \mapsto CL$

8, čtyřúhelník $ABCD$

Konstrukce.



obr. 6

Diskuse.

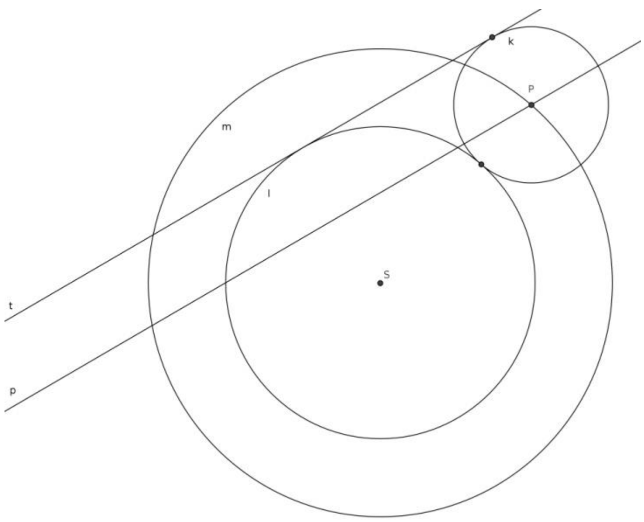
Úloha má 1 řešení.

4) Je dána kružnice *l*(*S*,2 cm) a přímka *t*, která je tečnou této kružnice. Sestrojte všechny kružnice, které mají poloměr 1 cm, dotýkají se přímky *t* a s kružnicí *l* mají vnější dotyk.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 7).



obr. 7

Bod P je od přímky t vzdálen 1 cm – leží tedy na přímce, která je tvořena všemi takovými body, bod P zároveň leží na kružnici m, která je tvořena středy všech kružnic, které mají s kružnicí l vnější dotyk. Bod P je potom průnikem těchto množin bodů. Odtud plynou hlavní body konstrukce:

1, $p_1, p_2;\ p_1 \parallel p_2$, vzdálenost p_1 a t resp. p_2 a t je 1 cm

2, $m(S, 3\text{ cm})$

3, $P = m \cap (p_1 \cup p_2)$

Popis konstrukce.

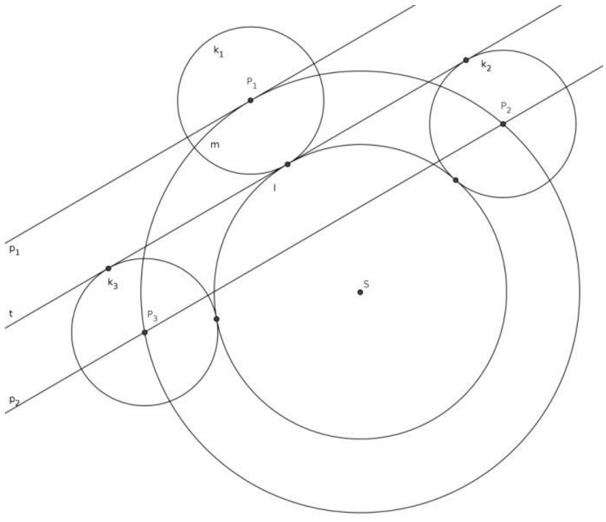
1, $p_1, p_2;\ p_1 \parallel p_2$, vzdálenost p_1 a t resp. p_2 a t je 1 cm

2, $m; m(S, 3\text{ cm})$

3, $P; P = m \cap (p_1 \cup p_2)$

4, $k; k(P, 1\text{ cm})$

Konstrukce.



obr. 8

Diskuse.

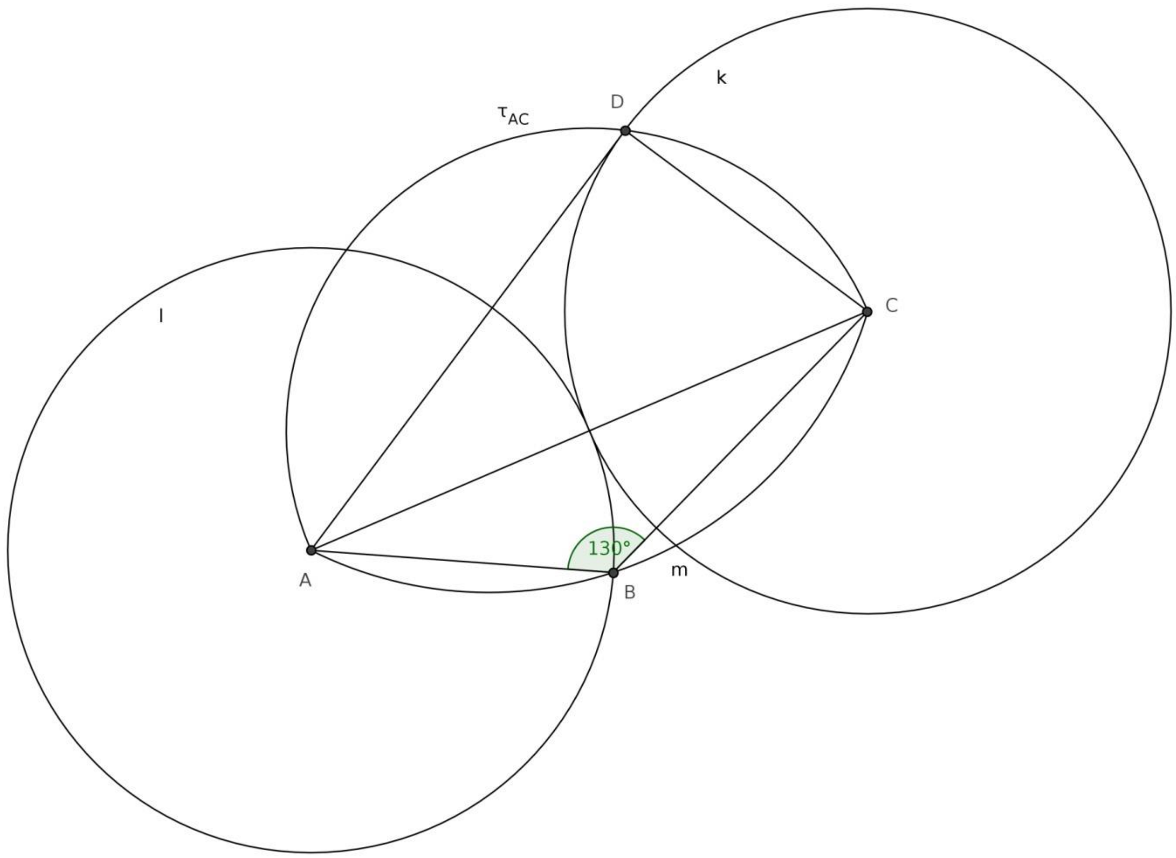
Úloha má 3 řešení. V obr. 8 jsou označeny indexy 1–3.

5) Je dána úsečka *AC*, |*AC*| = 8 cm. Sestrojte všechny čtyřúhelníky *ABCD* tak, aby *a* = *c* = 4 cm, *β* = 130° , *δ* = 90°.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 9).



obr. 9

Body *A*, *C* jsou dány, zbývá nalézt body *D* a *B*. Bod *D* je průnikem množiny bodů, ze které je úsečka *AC* vidět pod pravým úhlem (tj. Thaletova kruž. nad *AC*) a množiny bodů, které mají od *C* vzdálenost 4 cm. Podobně bod *B* je průnikem množiny bodů, ze které je úsečka *AC* vidět pod úhlem 130° a množiny bodů, které mají od *A* vzdálenost 4 cm. Z těchto úvah vyplývají hlavní body postupu konstrukce:

1, τ_{AC}

2, $k; k(C, 4\text{ cm})$

3, $D; D = \tau_{AC} \cap k$

4, *m*, *m* je množina bodů, ze kterých je úsečka AC vidět pod úhlem 130°

5, $l; l(A, 4\text{ cm})$

6, $B; B = l \cap m$

Popis konstrukce.

1, AC; $|AC| = 8$ cm

2, τ_{AC}

3, $k; k(C, 4$ cm)

4, $D; D = \tau_{AC} \cap k$

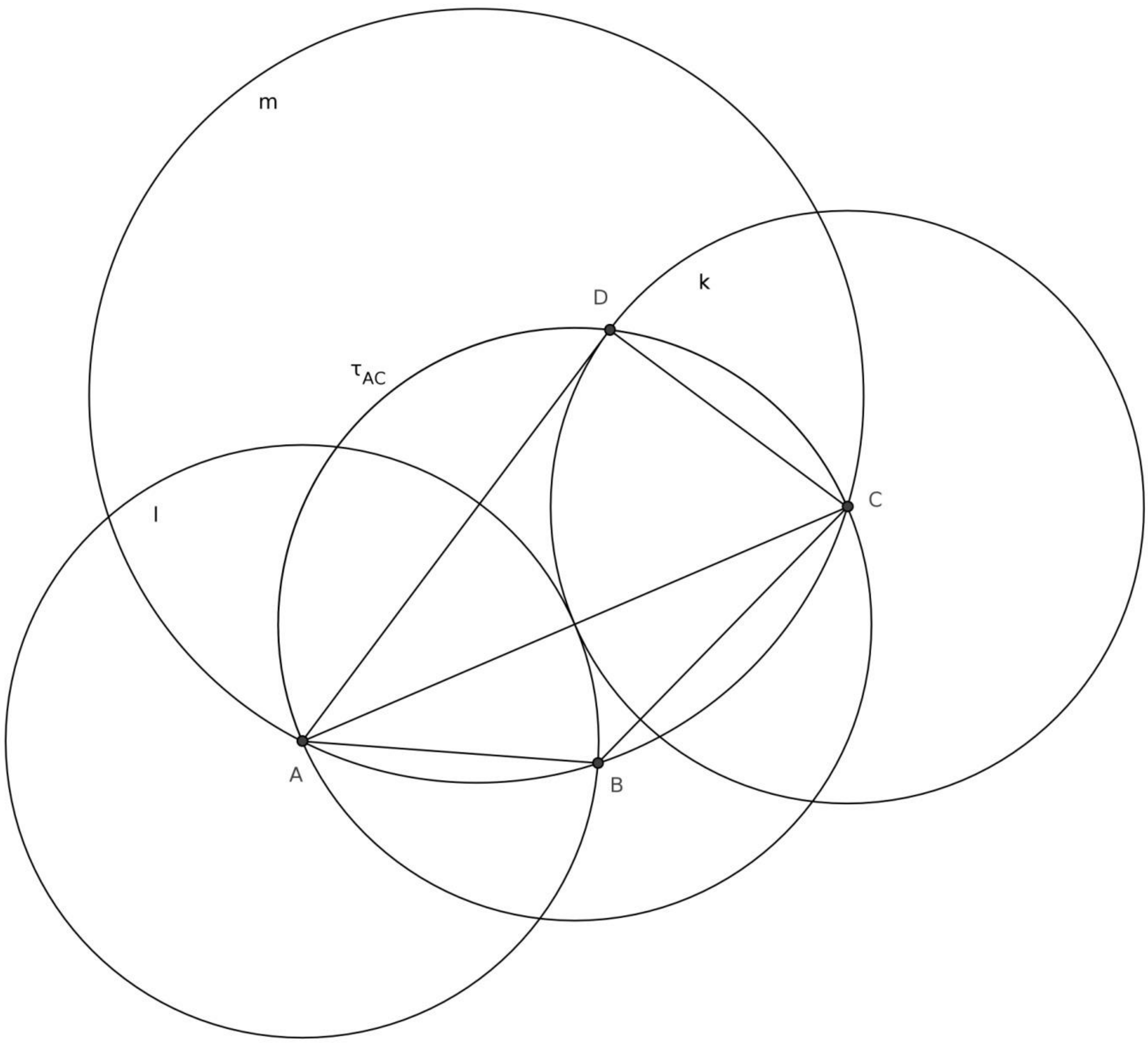
5, $m; m = \{X \in \rho;\ |\measuredangle AXC| = 130°\}$

6, $l; l(A, 4$ cm)

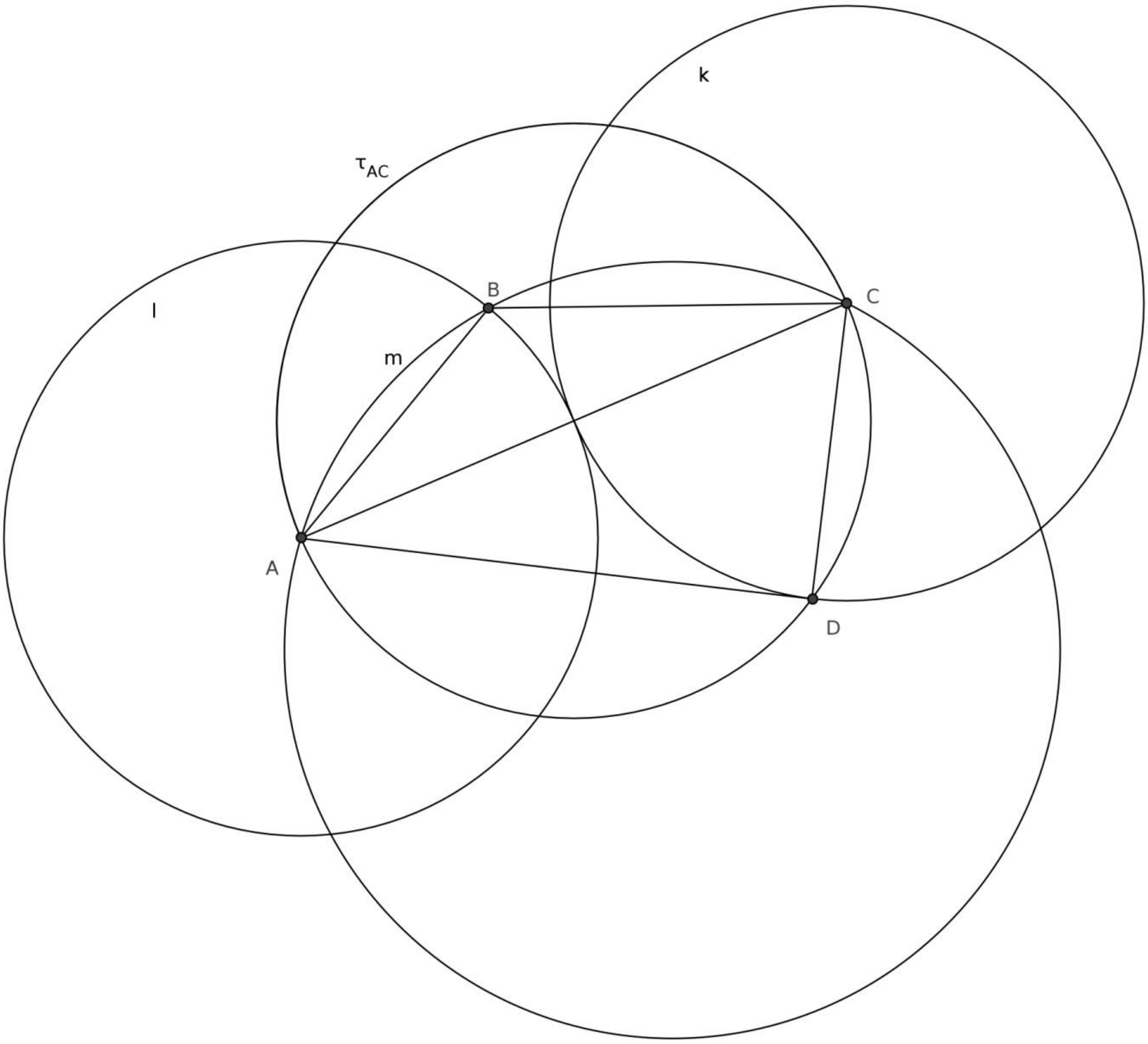
7, $B; B = m \cap l$, přičemž akceptujeme pouze průsečík v opačné polorovině, než je bod S

8, čtyřúhelník $ABCD$

Konstrukce.



obr. 10a



obr. 10b

Diskuse.

Úloha má 2 řešení.

Úlohy k procvičení:

1. Je dána úsečka AB ($|AB| = 6$ cm). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí $a = 5$ cm, $t_c = 5$ cm.

   [Návod: Podle věty *sss* sestrojíme trojúhelník C_1BC ($|C_1B| = 3$ cm). Bod A potom leží na polopřímce BC_1.]

2. Sestrojte trojúhelník ABC, pro který platí $\gamma = 75°$, $v_a = 3{,}5$ cm, $r = 2{,}5$ cm, kde r je poloměr kružnice opsané.

   [Návod: Úhel ACB má poloviční velikost než úhel ASB, kde S je střed kružnice opsané. Označme A_0 patu výšky v_a. Bod A_0 je společným bodem Thaletovy kružnice nad úsečkou AB a kružnice se středem v bodě A a poloměrem v_a.]

3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$), pro který platí $b = 4$ cm, $c = 2$ cm, $\alpha = 60°$, $f = 5$ cm.

   [Návod: Trojúhelník BCD lze sestrojit podle věty *sss*. Bod A je potom společným bodem rovnoběžky s CD procházející bodem B a kružnice, ze které je úsečka BD vidět pod úhlem α.]

4. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, pro který platí $a = 5$ cm, $c = 3$ cm, $\alpha = 75°$, $e = 4{,}5$cm, $f = 5{,}5$ cm.

   [Návod: Trojúhelník ABD lze sestrojit podle věty *Ssu*. Bod C musí mít od bodu A vzdálenost c a zároveň od bodu A vzdálenost e – je tedy průnikem náležitě sestrojených dvou kružnic.]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-358-5.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.