INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

Kvadratické rovnice s parametrem

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	17. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá řešení kvadratických rovnic s parametrem a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Kvadratické rovnice s parametrem

Příklad 1

Řešte v $\boldsymbol{R}$ kvadratickou rovnici s parametrem $a \in \boldsymbol{R}$:

$$2ax^2 + ax - 1 = 0$$

Řešení:

Daná rovnice je kvadratická pro $a \neq 0$. Pro $a = 0$ dostáváme po dosazení do rovnice nepravdivý výrok $-1 = 0$, rovnice nemá řešení.

Dále tedy uvažujme případ $a \neq 0$. Daná rovnice je kvadratická a o jejím řešení rozhoduje diskriminant $D = b^2 - 4ac = a^2 - 4 \cdot 2a \cdot (-1) = a^2 + 8a$.

- $\boldsymbol{D > 0}$

$$a^2 + 8a > 0$$
$$a \cdot (a + 8) > 0$$
$$a \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty).$$

Daná rovnice má řešení

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a}}{4a}$$

- $\boldsymbol{D = 0}$

$$a^2 + 8a = 0$$
$$a = -8; a = 0.$$

Případ $a = 0$ však nebudeme uvažovat (viz předchozí) a po dosazení $a = -8$ do zadání dostáváme rovnici $-16x^2 - 8x - 1 = 0$. Jejím řešením je dvojnásobný kořen $x = -\frac{1}{4}$.

- $\boldsymbol{D < 0}$

$$a^2 + 8a < 0$$
$$a \cdot (a + 8) < 0$$
$$a \in (-8; 0)$$

Rovnice nemá reálné kořeny.

Shrnutí:

a	**K**
$a \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$	$\left\{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a}}{4a}\right\}$
$a = -8$	$\left\{-\frac{1}{4}\right\}$
$a \in (-8; 0\rangle$	$\emptyset$

Příklad 2

Řešte v $\boldsymbol{R}$ kvadratickou rovnici s parametrem $a \in \boldsymbol{R}$:

$$(2a+3)x^2 + x - a + 4 = 0$$

Řešení:

Daná rovnice je kvadratická pro $a \neq -\frac{3}{2}$. Je-li $a = -\frac{3}{2}$, je rovnice lineární a dostáváme

$$x + \frac{3}{2} + 4 = 0.$$

Jejím řešením je $x = -\frac{11}{2}$.

Dále tedy budeme pokračovat za předpokladu, že $a \neq -\frac{3}{2}$. Rovnice bude kvadratická a o řešení rozhoduje diskriminant *D*. V našem případě je

$a = (2a+3); b = 1; c = -a + 4$

a proto *D* = $b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (2a+3) \cdot (-a+4) = 8a^2 - 20a - 47$.

- $\boldsymbol{D > 0}$ $8a^2 - 20a - 47 > 0$ a to platí pro $\forall a \in \boldsymbol{R}$

  Daná rovnice má řešení

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{8a^2 - 20a - 47}}{4a+6}$$

- $\boldsymbol{D = 0}$ nenastane
- $\boldsymbol{D < 0}$ nenastane

Shrnutí:

a	**K**
$a = -\frac{3}{2}$	$\left\{-\frac{11}{2}\right\}$
$a \neq -\frac{3}{2}$	$\left\{\frac{-1 \pm \sqrt{8a^2 - 20a - 47}}{4a+6}\right\}$

Příklad 3

Při kterých hodnotách parametru $p \in \boldsymbol{R}$ má rovnice

$$(2p+3)x^2 - 2(p+4)x + p - 2 = 0$$

dvojnásobný reálný kořen?

Řešení:

Je-li $p = -\frac{3}{2}$, je zadaná rovnice lineární a řešením je jediný kořen $x = -\frac{7}{10}$. Dále budeme uvažovat, že $p \neq -\frac{3}{2}$.

Určíme si diskriminant $D = -4p^2 + 36p + 88$. Rovnice bude mít jeden dvojnásobný reálný kořen v případě, že $D = 0$, tj. pro $p_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+88}}{-2} = \frac{-9 \pm 13}{-2}$ a $p_1 = -2; p_2 = 11$.

a) $p_1 = -2$

Potom zadaná rovnice má tvar $x^2 + 4x + 4 = 0$ a jejím řešením je dvojnásobný reálný kořen $x_{1,2} = -2$.

b) $p_2 = 11$

Potom zadaná rovnice má tvar $25x^2 - 30x + 9 = 0$ a jejím řešením je dvojnásobný reálný kořen $x_{1,2} = \frac{3}{5}$.

Shrnutí:

p	*x*
$p = -2$	-2
$p = 11$	$\frac{3}{5}$

Úlohy k procvičení

1. V množině reálných čísel řešte rovnici s parametrem $a \in \boldsymbol{R}$:

$$x^2 - 2ax + 2a^2 - 9 = 0.$$

a	**K**
$a \in (-3; 3)$	$\left\{a \pm \sqrt{9 - a^2}\right\}$
$a = 3$	$\{3\}$
$a = -3$	$\{-3\}$
$a \in (-\infty;\ -3) \cup (3;\ +\infty)$	$\emptyset$

2. V množině reálných čísel řešte rovnici s parametrem $a \in \boldsymbol{R}$:

$$ax(3x + 4) = \ x^2 + 1$$

a	**K**
$a = 0$	$\emptyset$
$a = \frac{1}{3}$	$\left\{\frac{3}{4}\right\}$
$a = -1$	$\left\{\frac{1}{2}\right\}$
$a = \frac{1}{4}$	$\{2\}$
$a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{1}{4})$	$\emptyset$
$a \in (-\infty;\ -1) \cup (\frac{1}{4}; \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3};\ +\infty)$	$\left\{\frac{-4a \pm \sqrt{16a^2 + 12a - 4}}{6a - 2}\right\}$

3. Určete, pro které hodnoty parametru $a \in \boldsymbol{R}$ má rovnice

$(a + 2)x^2 + 2(a + 3)x + a - 1 = 0$ dvojnásobný reálný kořen.

$$\left[a = -\frac{11}{5};\ x_{1,2} = 4\right]$$

4. Určete, pro které hodnoty parametru $a \in \boldsymbol{R}$ má rovnice

$2(a + 2)x^2 - 24x + a + 3 = 0$ dva reálné různé kořeny.

$$[a \in (-11; 6)]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a CALDA Emil. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-366-0.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.