Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

LINEÁRNÍ ROVNICE S PARAMETREM A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC S PARAMETREM

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	14. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá řešení lineárních rovnic s parametrem a soustav lineárních rovnic s parametrem a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Lineární rovnice s parametrem a soustavy rovnic s parametrem

Příklad 1

Řešte v ***R*** rovnici $\frac{x+a}{a} = ax - 1$ s parametrem $a \in \boldsymbol{R}$.

Řešení:

Nejprve stanovíme podmínky řešitelnosti rovnice – je zřejmé, že $a \neq 0$. Potom

$$x + a = a^2x - a$$

$$x - a^2x = -2a$$

$$x.(1-a).(1+a) = -2a$$

Je-li nyní *a* = 1 nebo *a* = -1, dostaneme nepravdivý výrok a to buď 0.x = - 2 nebo 0.x = 2. Proto dále předpokládejme, že $a \neq \pm 1$. Pak

$$x = \frac{2a}{(a-1).(a+1)}$$

Shrnutí:

a	**K**
a = 1	∅
a = - 1	∅
a = 0	∅
$a \neq 0, a \neq \pm 1$	$\left\{\frac{2a}{a^2-1}\right\}$

Příklad 2

Řešte v ***R*** rovnici $\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}$ s parametrem $a \in \boldsymbol{R}$.

Řešení:

Rovnice má smysl pouze při $a \neq 0$ a dále pro $x \neq 1$. Potom

$$(2-a).(x-1) = 2a$$

$$2x - ax - 2 + a = 2a$$

$$x.(2-a) = a + 2$$

Je-li nyní *a* = 2, získáme nepravdivý výrok 0.x = 4. Dále tedy budeme předpokládat, že $a \neq 2$. Takže

$$x = \frac{a+2}{2-a}$$

Shrnutí:

a	**K**
$a = 0$	$\emptyset$
$a = 2$	$\emptyset$
$a \neq 0, a \neq 2$	$\left\{\frac{a+2}{2-a}\right\}$

Příklad 3

Řešte v ***R*** rovnici $\frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m}$ s parametrem $m \in \boldsymbol{R}$.

Řešení:

Zadaná rovnice má smysl při $m \neq 0$ a dále $x \neq 0$. Tedy

$$m^2 - 4 = mx - 2x$$

$$x.(m-2) = (m-2).(m+2)$$

Je-li nyní *m* = 2, dostáváme rovnici 0.x = 0 a ta je splněná pro každé reálné číslo. Nesmíme ale zapomenout na podmínky řešitelnosti a vyloučit případ *x* = 0. Dále musíme uvážit možnost *m* = -2; v tomto případě nemá rovnice žádné řešení, protože vychází *x* = 0 a to není vzhledem k podmínkám možné. Potom

$$x = m + 2$$

Shrnutí

m	**K**
$m = 0$	$\emptyset$
$m = 2$	$\boldsymbol{R} - \{0\}$
$m = -2$	$\emptyset$
$m \neq 0; m \neq \pm 2$	$\{m+2\}$

Příklad 4

Obvod předního kola vozu je a metrů, zadního b metrů ($b > a$). Na jak veliké dráze udělá přední kolo o 1 otáčku víc než zadní?

Řešení:

Zadanou úlohu řešíme vzhledem k uražené dráze, parametry jsou obvody kol. Obě kola urazí stejnou vzdálenost d a platí, že

$$d = n_1.a$$

$$d = n_2.b$$

kde n_1 je počet otáček P kola a n_2 je počet otáček Z kola. Podle zadání má být $n_1 = n_2 + 1$. Tedy

$$d = (n_2 + 1).a$$

$$d = n_2.b \rightarrow n_2 = \frac{d}{b}$$

$$d = \left(\frac{d}{b} + 1\right).a$$

$$d = \frac{d.a}{b} + a$$

$$d.b = d.a + a.b$$

$$d.b - d.a = a.b$$

$$d = \frac{a.b}{b - a}$$

Přední kolo vykoná o 1 otáčku víc než zadní na dráze $\frac{a.b}{b-a}$ metrů.

Příklad 5

Řešte soustavu rovnic s neznámými *x, y* a parametrem $a \in \boldsymbol{R}$:

$$3x + ay = 1$$

$$x + 2y = 3$$

Řešení:

Z druhé rovnice si vyjádříme neznámou $x = 3 - 2y$ a dosadíme do první rovnice

$$3.(3 - 2y) + ay = 1$$

$$9 - 6y + ay = 1$$

$$y.(a-6) = -8$$

Je-li $a = 6$, nemá daná soustava žádné řešení. Je-li $a \neq 6$, potom $y = \frac{8}{6-a}$ a dosazením pro *x* dostaneme $x = 3 - 2.\frac{8}{6-a} = \frac{18-3a-16}{6-a} = \frac{2-3a}{6-a}$.

Shrnutí:

a	**K**
$a = 6$	$\emptyset$
$a \neq 6$	$\left\{\left[\frac{2-3a}{6-a}; \frac{8}{6-a}\right]\right\}$

Úlohy k procvičení

1. Řešte v ***R*** rovnici $\frac{kx+1}{x-2} = \frac{kx-1}{x+2}$ s parametrem $k \in \boldsymbol{R}$.
   [Je-li $k \neq -\frac{1}{2}$, má daná rovnice jediný kořen $x = 0$. Je-li $k = -\frac{1}{2}$, vyhovuje dané rovnici každé $x \neq \pm 2$.]
2. Řešte v ***R*** rovnici $1 + \frac{k^2-1}{x} = k$ s parametrem $k \in \boldsymbol{R}$.
   [Je-li $k = 1$, vyhovuje rovnici každé $x \neq 0$. Je-li $k = -1$, rovnice nemá žádný kořen. Je-li $k \neq \pm 1$, má rovnice řešení $x = k + 1$.]
3. Řešte v ***R*** rovnici $\frac{k^2(x-1)}{kx-2} = 2$ s parametrem $k \in \boldsymbol{R}$.
   [Je-li $k = 0$, nemá daná rovnice žádné řešení. Je-li $k = 2$, vyhovuje dané rovnici každé $x \neq 1$; pro $k \neq 0$ a $k \neq 2$ má rovnice řešení $x = \frac{k+2}{k}$.]
4. Z místa *A* vyjelo auto rychlostí v_1 km/h směrem k místu *B* vzdálenému *d* km od *A*. Z místa *B* vyjelo ve stejný okamžik jiné auto rychlostí v_2 km/h $(v_1 > v_2)$ a) opačným směrem, b) stejným směrem. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od místa *B* se setkají?
   [a) Setkají se za $\frac{d}{v_1+v_2}$ hodin ve vzdálenosti $\frac{d.v_2}{v_1+v_2}$ km od místa *B*. b) První auto dohoní druhé auto za $\frac{d}{v_1-v_2}$ ve vzdálenosti $\frac{d.v_2}{v_1-v_2}$ km od místa *B*.]
5. Řešte soustavu rovnic s neznámými *x, y* a parametrem $a \in \boldsymbol{R}$:

$$3(ax-1) = -y \qquad 3(ay-1) = -x$$

a	**K**
$a = \frac{1}{3}$	$\{[x; 3-x]\}$
$a = -\frac{1}{3}$	$\emptyset$
$a \neq \pm\frac{1}{3}$	$\left\{\left[\frac{3}{3a+1}; \frac{3}{3a+1}\right]\right\}$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.