INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ZÁKLADNÍ POZNATKY Z LOGIKY A TEORIE MNOŽIN

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	3. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pravdivostní hodnoty a negace výroků, umí číst, vyhodnocovat a negovat formule s kvantifikátory, řeší slovní úlohy pomocí výrokové logiky
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené úlohy:

1. Napište, které z zvedených tvrzení jsou výroky a určete jejich pravdivostní hodnotu:
   a) Bratislava je hlavní město České republiky.
   b) Dějepis je nejlepší předmět.
   c) $3 \cdot 5 + 9 \geq 20$
   d) $x + 7 = 9$
   e) $\forall x \in N : x + 7 \geq 9$

   Řešení:
   a) Je výrok (jde o sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je či není pravdivé), není však pravdivý.
   b) Není výrok, je to otázkou vkusu.
   c) Je výrok a je pravdivý.
   d) Není výrok (nevíme, co znamená proměnná x a nelze určit pravdivostní hodnotu tohoto tvrzení).
   e) Je výrok a není pravdivý (pro x = 1 neplatí).

2. Utvořte negace následujících výroků (bez použití „není pravda, že):
   a) Mám víc než deset korun.
   b) Žádný student naší třídy dnes nechybí.
   c) Nejvýše tři studenti dostali z písemky jedničku.
   d) Aspoň jeden student nesportuje.
   e) Existují právě 4 prvočísla menší než 10.
   f) Rovnice $\left(x^2 + 5x + 6 = 0\right)$ má v množině reálných čísel aspoň 2 kořeny.

   Řešení:
   a) Mám deset nebo méně korun.
   b) Aspoň jeden student naší třídy dnes chybí.
   c) Aspoň čtyři studenti dostali z písemky jedničku.
   d) Každý student sportuje.
   e) Existují nejvýše 3 nebo alespoň 5 prvočísel menších než 10.
   f) Rovnice $\left(x^2 + 5x + 6 = 0\right)$ má v množině reálných čísel nejvýše 1 kořen.

3. Kvantifikované výroky zapsané symbolicky vyjádřete slovy a rozhodněte o jejich pravdivosti:
   a) $\forall x \in R : \sqrt{x^2} = |x|$
   b) $\exists x \in R : x^2 < 0$
   c) $\forall x \in R \; \exists y \in R : x \cdot y = 5$
   d) $\exists x \in R \; \forall y \in R : x + y = y$

   Řešení:
   a) Pro každé reálné číslo x platí, že druhá odmocnina z druhé mocniny x je rovna absolutní hodnotě z x. (Resp. Druhá odmocnina z druhé mocniny každého reálného čísla x je rovna jeho absolutní hodnotě). Pravdivý.

b) Existuje aspoň jedno reálné číslo x takové, že jeho druhá mocnina je menší než nula Nepravdivý.
c) Ke každému reálnému číslu x existuje reálné číslo y tak, že součin $x \cdot y$ je roven pěti. Nepravdivý (pro x=0 takové y neexistuje).
d) Existuje aspoň jedno reálné číslo x takové, že pro všechna reálná čísla y je součet $x + y$ roven číslu y. Pravdivý (x=0).

4. Negujte následující složené výroky:
   a) Venku neprší nebo je duha.
   b) Koupil pomeranče a šel domů.
   c) Petr hraje právě tehdy, když hraje David.
   d) Mají-li v obchodě pomeranče, nekupujeme grepy.

   Řešení:
   a) Venku prší a není duha.
   b) Nekoupil pomeranče nebo nešel domů.
   c) Petr hraje a David nehraje nebo Petr nehraje a David hraje.
   d) V obchodě mají pomeranče a kupujeme grepy.

5. K dané implikaci napište obrácenou a obměněnou implikaci a určete pravdivostní hodnoty všech těchto výroků:
   Jestliže je celé číslo dělitelné šesti, pak je dělitelné dvěma.

   Řešení:
   Uvedená implikace je pravdivá.
   Je-li původní implikace $A \Rightarrow B$, pak obrácená implikace je $B \Rightarrow A$.
   Je-li původní implikace $A \Rightarrow B$, pak obměněná implikace je $\neg B \Rightarrow \neg A$.
   Obrácená implikace: Jestliže je celé číslo dělitelné dvěma, pak je dělitelné šesti. Je nepravdivá.
   Obměněná implikace: Jestliže celé číslo není dělitelné dvěma, pak není dělitelné šesti. Je pravdivá.

6. Když si dám kávu, dám si i moučník. Nedám-li si zmrzlinu, pak si nedám moučník. Vyplývá z uvedeného, že když si dám kávu, dám si i zmrzlinu?

   Řešení:
   Označme si jednotlivé výroky:
   A: Dám si kávu.
   B: Dám si moučník.
   C: Dám si zmrzlinu.

   Přepíšeme si jednotlivé složené výroky symbolicky:
   Když si dám kávu, dám si i moučník: $A \Rightarrow B$.
   Nedám-li si zmrzlinu, pak si nedám moučník: $\neg C \Rightarrow \neg B$.
   Oba tyto výroky mají být splněny současně, tedy předpokladem implikace je konjunkce $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)]$.
   Když si dám kávu, dám si i zmrzlinu: $A \Rightarrow C$.

Nyní musím zjistit, zda je výrok $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ tautologie (tedy zda je pravdivostní hodnota uvedené implikace vždy 1 nezávisle na pravdivostních hodnotách výroků A, B, C).

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$A \Rightarrow B$	$(\neg C \Rightarrow \neg B)$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)$	$(A \Rightarrow C)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

$[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
1
1
1
1
1
1
1
1

Výrok $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ je tautologie. Můžeme tedy říci, že uvedený úsudek je správný.
Ano, z výroků „Když si dám kávu, dám si i moučník.“ a „Nedám-li si zmrzlinu, pak si nedám moučník“ vyplývá, že když si dám kávu, dám si i zmrzlinu

7. Činnost turbogenerátorů A, B, C v jedné elektrárně je dána následujícími podmínkami: Pokud není v chodu A, pak je v činnosti B. Není-li v provozu B a není v provozu ani C, pak je mimo provoz i A. Když je A vypnutý a B zapnutý, potom je zapnutý také C. Určete všechny možnosti pro práci uvedené trojice turbogenerátorů a pokuste se jej vystihnout co nejstručněji.

   Řešení:
   Označme si jednotlivé výroky:
   A: Turbogenerátor A je zapnutý.
   B: Turbogenerátor B je zapnutý.
   C: Turbogenerátor C je zapnutý.

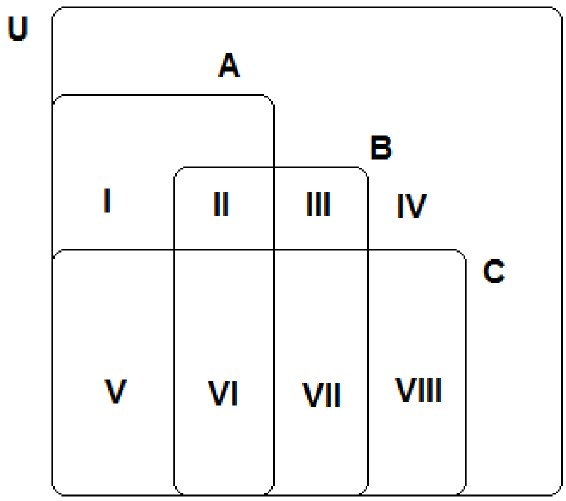
   Opět si přepíšeme jednotlivé složené výroky:
   Pokud není v chodu A, pak je v činnosti B: $\neg A \Rightarrow B$.
   Není-li v provozu B a není v provozu ani C, pak je mimo provoz i A: $(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow \neg A$.
   Když je A vypnutý a B zapnutý, potom je zapnutý také C: $(\neg A \wedge B) \Rightarrow C$.

Zapíšeme si tabulku pravdivostních hodnot uvedených složených výroků (ty jsou v tabulce znázorněny šedě). Hledáme možnosti, kdy jsou splněny všechny tři podmínky ze zadání (ve všech šedých sloupcích musí být pravdivostní hodnota 1 – příslušné řádky jsou zvýrazněny).

A	B	C	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B \wedge \neg C$	$(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow \neg A$	$\neg A \wedge B$	$(\neg A \wedge B) \Rightarrow C$
1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1

Pro práci turbogenerátorů tedy existují čtyři možnosti: Zapnuté jsou všechny tři. Zapnuté jsou právě A a B. Zapnuté jsou právě A a C. Zapnuté jsou právě B a C.
Stručněji vyjádřeno: V chodu jsou vždy aspoň dva turbogenerátory.

8. Zjistěte na Vennově diagramu pro tři podmnožiny A, B, C základní množiny U oblasti, které jsou obrazem oboru pravdivosti výrokových forem:
   a) $(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$
   b) $(x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C'$
   c) $(x \in A \wedge x \in C) \vee x \notin C$
   d) $x \in A \Rightarrow x \in C$



Obr. 1 Vennův diagram pro tři množiny A, B, C

Řešení:

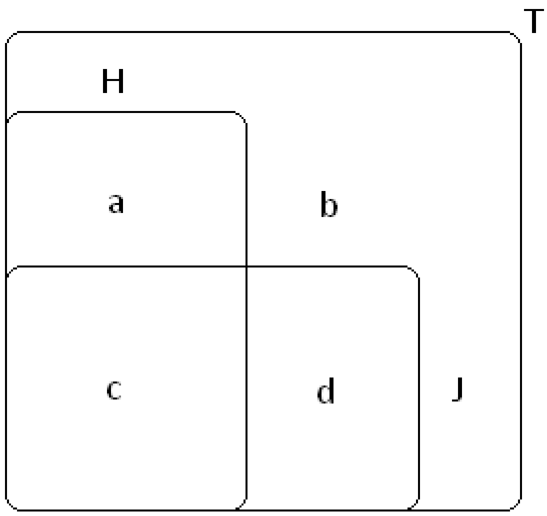
a) $(x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$ lze pomocí množinových operací vyjádřit jako $(A \cap B) \cup C$. Tedy ta pole, která obsahují prvky oboru pravdivosti dané výrokové formy, jsou II, V, VI, VII, VIII.

b) $(x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C'$ můžeme pomocí množinových operací vyjádřit jako $(A \cup B) \cap C'$. Tedy ta pole, která obsahují prvky oboru pravdivosti dané výrokové formy, jsou I, II, III.

c) $(x \in A \wedge x \in C) \vee x \notin C$ lze pomocí množinových operací vyjádřit jako $(A \cap C) \cup C'$. Tedy ta pole, která obsahují prvky oboru pravdivosti dané výrokové formy, jsou I, II, III, IV, V, VI.

d) $x \in A \Rightarrow x \in C$ lze zapsat též jako $(x \in A \wedge x \notin C)'$ je možno pomocí množinových operací vyjádřit jako $(A \cap C')'$. Tedy ta pole, která obsahují prvky oboru pravdivosti dané výrokové formy, jsou III, IV, V, VI, VII, VIII.

9. Studenti jedné třídy se účastnili soutěže ve sběru léčivých bylin (heřmánku a jitrocele). Ve třídě bylo 30 studentů. Heřmánek nebo jitrocel sbíralo 28 žáků. Nejvýše jeden z uvedených druhů bylin sbíralo 20 žáků. Jitrocel sbíralo o šest žáků méně než heřmánek. Určete, kolik studentů sbíralo:
   a) Pouze heřmánek
   b) Heřmánek i jitrocel.



Obr. 2 Vennův diagram s označením počtu prvků v jednotlivých polích

Počty prvků v jednotlivých polích diagramu jsou čtyři proměnné. Ze zadání získáme čtyři rovnice a budeme řešit soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých.

Ve třídě je 30 studentů $\Rightarrow a+b+c+d=30$.
28 žáků sbíralo heřmánek nebo jitrocel $\Rightarrow a+c+d=28$ (patří sem i ti, co sbírali obě byliny).
20 studentů sbíralo nejvýše jednu bylinu $\Rightarrow a+b+d=20$.
Heřmánek sbíralo o šest studentů více než jitrocel $\Rightarrow a+c=c+d+6$.

$a+b+c+d=30$

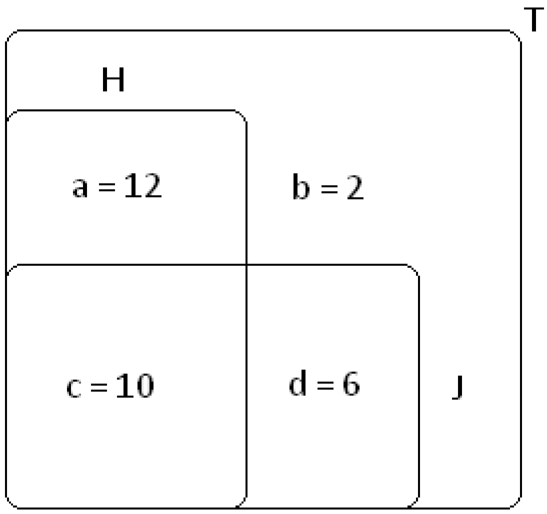
$a+c+d=28$

$a+b+d=20$

$a+c=c+d+6$

Do první rovnice dosadíme za $a+c+d=28$: $b+28=30 \Rightarrow b=2$.
Do třetí rovnice dosadíme b=2: $a+2+d=20 \Rightarrow a+d=18$.
Úpravou poslední rovnice získáme: $a=d+6$.
Dosadíme za a do třetí rovnice a vyjde $d=6 \Rightarrow a=12$.

Počty prvků zakreslíme do obrázku a odpovíme na jednotlivé otázky.



Obr. 3 Vennův diagram s počty studentů v jednotlivých polích

a) Pouze heřmánek sbíralo 12 studentů.
b) Heřmánek i jitrocel sbíralo 10 studentů.

10. Jsou dány dvě množiny: $A=\{x \in N; x|60\}, B=\{x \in N;\ 7<x \leq 10\}$. Zapište výsledek operací:
a) $A \cup B$
b) $A \cap B$
c) $A-B$
d) $B-A$

Řešení:
Nejprve určíme výčtem prvků jednotlivé množiny:
$A=\{x \in N; x|60\}=\{1;2;3;4;5;6;10;12;15;20;30;60\}$
$B=\{x \in N;\ 7<x \leq 10\}=\{8;9;10\}$
a) $A \cap B=\{10\}$ (jediný prvek, který je v obou množinách)
b) $A \cup B=\{1;2;3;4;5;6;8;9;10;12;15;20;30;60\}$ (prvky, které leží v aspoň jedné z obou množin)
c) $A-B=\{1;2;3;4;5;6;12;15;20;30;60\}$(prvky, které leží v množině A a neleží v množině B)
d) $B-A=\{8;9\}$(prvky, které leží v množině B a neleží v množině A).

Úlohy k procvičení:

1. Napište, které z uvedených tvrzení jsou výroky a určete jejich pravdivostní hodnotu:
   a) Úhlopříčky v rovnoběžníku se navzájem půlí.
   b) Číslo x je liché.
   c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   d) Číslo 15 je sudé.
   e) Pro všechna reálná čísla a, b platí $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

[a) ano, pravdivý, b) ne, c) ne, d) ano, nepravdivý, e) ano, pravdivý]

2. Utvořte negace následujících výroků (bez použití „není pravda, že):
   a) Platí aspoň jeden z výroků A, B.
   b) Platí každý z výroků A, B.
   c) Neplatí žádný z výroků A, B.
   d) Platí nejvýše jeden z výroků A, B.
   e) Aspoň jeden z výroků A, B neplatí.
   f) Platí právě jeden z výroků A, B.
   g) Právě jeden z výroků A, B neplatí.

   [a) Neplatí žádný z výroků A, B. b) Aspoň jeden z výroků A, B neplatí. c) Aspoň jeden z výroků A, B platí, d) Platí oba výroky A,B, e) Platí oba výroky A, B. f) Neplatí žádný z výroků A, B nebo platí oba výroky A,B. g) Neplatí žádný z výroků A, B nebo platí oba výroky A, B.]

3. Negujte následující složené výroky:
   a) Jestliže dostanu pětku, nebudu se moci večer dívat na televizi.
   b) O víkendu pojedu k babičce a nebudu jezdit na kole.
   c) Po škole jsem byl doma nebo u kamaráda.
   d) Půjdu na procházku právě tehdy, když nebude pršet.
   e) Jestliže má čtyřúhelník všechny strany shodné, pak jde o čtverec nebo kosočtverec.

   [a) Dostanu pětku a budu se moci dívat na televizi. b) O víkendu nepojedu k babičce nebo budu jezdit na kole. c) Po škole jsme nebyl doma ani u kamaráda. d) Půjdu na procházku a bude pršet nebo nepůjdu na procházku a nebude pršet. e) Čtyřúhelník má všechny strany shodné a nejde o čtverec ani o kosočtverec.]

4. K daným implikacím napište obrácené a obměněné implikace a určete pravdivostní hodnoty všech těchto výroků:
   a) Je-li druhá mocnina reálného čísla větší než 10, potom je i dané reálné číslo větší než 10.
   b) Jestliže je konvexní čtyřúhelník kosočtverec, pak jsou jeho úhlopříčky navzájem kolmé.
   c) Je- li součin dvou přirozených čísel liché číslo, pak jsou obě čísla lichá.

   [a) Obrácená: Jeli reálné číslo větší než 10, pak je i jeho druhá mocnina větší než 10. Obměněná: Je-li reálné číslo menší nebo rovno 10, pak je i jeho druhá mocnina menší nebo rovna deseti. Původní a obměněná implikace neplatí, obrácená implikace platí., b) Obrácená: Jestliže jsou úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku navzájem kolmé, pak se jedná o kosočtverec. Obměněná: Jestliže nejsou úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku navzájem kolmé, pak se nejedná o kosočtverec. Platí původní a obměněná implikace, neplatí obrácená implikace.

c) Jsou-li dvě přirozená čísla lichá, pak je jejich součin liché číslo. Obměněná: Nejsou-li daná dvě přirozená čísla lichá, pak jejich součin není liché číslo. (Resp. Jsou-li daná dvě přirozená čísla sudá, pak je jejich součin sudé číslo.) Platí původní, obrácená i obměněná implikace.]

5. Ve výstavní síni byl odcizen obraz. Vyšetřováním se okruh podezřelých zúžil na osoby A, B, C. Na základě výslechů lze fakta o přítomnosti podezřelých ve výstavní síni v kritické době shrnout do tří závěrů:
   a) Ve výstavní síni v té době nebyl C nebo není pravda, že tam byl aspoň jeden z dvojice A, C.
   b) Jestliže není pravda, že tam byl A současně s B, pak tam nebyl také C.
   c) Podezřelý C tam byl právě tehdy, když tam nebyl žádný z dvojice A, B.

   Lze z těchto faktů jednoznačně určit pachatele? Pokud ano, určete jej.

[Pachatele lze určit jednoznačně a je jím podezřelý A.]

6. Když si dám kávu, dám si i moučník. Nedám-li si zmrzlinu, pak si nedám moučník. Vyplývá z uvedeného, že když si dám zmrzlinu, pak si nedám kávu?

[Nevyplývá.]

7. V bytovém domě je 40 rodin. Z nich $\frac{2}{5}$ mají auto i chatu. Přitom auto vlastní o 16 rodin více než chatu a není rodina, která by neměla chatu nebo auto. Vypočítejte:
   a) Kolik rodin z domu má auto.
   b) Kolik procent rodin z domu má chatu.
   c) Kolik rodin z domu má pouze chatu.

[a)36, b)50%, c)4]

8. Jsou dány intervaly $A = \langle -8;3\rangle;\ B = \langle -3;5);\ C = \langle 3;\infty)$. Zapište:

a) $A \cap B$	d) $(A \cap B) \cup C$	g) A'_R
b) $A \cap C$	e) $(A \cup B) \cap C$	h) $A - B$
c) $A \cup B$	f) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$	

[a) $\langle -3;3\rangle$, $b)\ \{3\}$, $c)\ \langle -8;5)$, $d)\ \langle -3;\infty)$, $e)\ \langle 3;5\rangle$, $f)\ \langle 3;5)$, $g)\ (-\infty;-8) \cup (3;\infty)$, $h)\ \langle -8;-3)$]

9. Pomocí Vennových diagramů rozhodněte, zda pro všechny podmnožiny A, B, C dané základní množiny U platí:
   a) $(A \cap B) \cap C' = (A \cap C') \cup (B \cap C')$
   b) $(A \cap B) \cap (A \cup C)' = A \cup (B \cap C')$

[a) platí, b) neplatí]

Použité zdroje a literatura:

BEČVÁŘ. Jindřich a HRUBÝ Dag. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky.* 2. vydání. Praha: Prométheus, 1992. ISBN 80-85849-34-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

BUŠEK, Ivan a CALDA Emil. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-366-0.

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. 4. vydání. Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-076-4.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Matematika pro I. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1984. ISBN 14-439-84.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.

Autorem obrázků je Hana Macholová.