

Řešení úlohy 51

a) Podmínky: $a = 0, b \neq 0$ nebo $a \neq 0, b > 0$

$$\text{Pro } a = 0, b \neq 0: (a^{12}b^{-3})^{\frac{1}{6}} = 0$$

$$\text{Pro } a \neq 0, b > 0: (a^{12}b^{-3})^{\frac{1}{6}} = a^2b^{-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\sqrt{b}}$$

$$\text{b) } [(\sqrt{3})^{12} \cdot 36^{-3}]^{\frac{1}{6}} = (\sqrt{3})^2 \cdot 36^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Řešení úlohy 52

a) Skutečná výška schodu: $(147 : 490) \text{ m} = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$

Výška schodu po úpravě: $(147 : 500) \text{ m} = 0,294 \text{ m} = 29,4 \text{ cm}$

Výška schodu by se zmenšila o 0,6 cm.

b) Skutečná výška schodu: $(x : y)$ metrů

Výška schodu po úpravě: $[x : (y + z)]$ metrů

$$\frac{x}{y} - \frac{x}{y+z} = \frac{xz}{y(y+z)}$$

Výška schodu by se zmenšila o $\frac{xz}{y(y+z)}$ metrů.

Pro hledaný počet procent p platí

$$\frac{p}{100} = \frac{\frac{x}{y+z}}{\frac{x}{y}}, \quad \text{odkud} \quad p = \frac{100y}{y+z}.$$

Řešení úlohy 53

$$\begin{aligned} \left(y + \frac{3y}{y-3}\right) \cdot \left(\frac{3y}{y+3} - 3\right) : \frac{9y^2}{y^2-9} &= \\ &= \frac{y^2 - 3y + 3y}{y-3} \cdot \frac{3y - 3y - 9}{y+3} \cdot \frac{(y-3)(y+3)}{9y^2} = \frac{-9y^2}{9y^2} = -1 \end{aligned}$$

Daný výraz je tedy roven -1 pro všechna $y \in \mathbb{R}$, pro která má smysl, tedy pro $y \neq 0, y \neq -3, y \neq 3$. Proto $M = (-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$.

Řešení úlohy 54

a) $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$

Uvažovaný součet je dělitelný třemi.

b) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2)$

Uvažovaný součet je dělitelný pěti.

c) $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 4(n + 1) + 2$

Uvažovaný součet dává při dělení čtyřmi pro každé $n \in \mathbb{N}$ zbytek 2, proto není pro žádné $n \in \mathbb{N}$ dělitelný čtyřmi.