

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**BINOMICKÉ ROVNICE**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 9. 1. 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá řešení binomických rovnic, jejich kořeny umí vyjádřit a goniometrickém i algebraickém tvaru a graficky je znázornit v Gaussově rovině |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Teorie:

Binomická rovnice je každá rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru:

$$x^{n}-a=0, x\in C, a\in C, n\in N, n>1$$

Kořeny určíme podle vztahu:

$$x\_{k}=\sqrt[n]{\left|a\right|}\left(\cos(\frac{α+2kπ}{n}+i\sin(\frac{α+2kπ}{n}))\right), k=0, 1, 2, …, n-1$$

Obrazy kořenů binomické rovnice tvoří vrcholy pravidelného n-úhelníka vepsaného do kružnice o poloměru $r=\sqrt[n]{\left|a\right|}$.

Řešené příklady:

**1) Řešte rovnici** $x^{6}-64=0$**.**

*Řešení:*

*I. způsob:*

*Rovnici vyřešíme algebraicky tak, že její levou stranu rozložíme v součin.*

$$x^{6}-64=x^{6}-2^{6}=\left(x^{3}-2^{3}\right)\left(x^{3}+2^{3}\right)=\left(x-2\right)\left(x^{2}+2x+4\right)\left(x+2\right)\left(x^{2}-2x+4\right)$$

*Získáme rovnici v součinovém tvaru.*

$$\left(x-2\right)\left(x^{2}+2x+4\right)\left(x+2\right)\left(x^{2}-2x+4\right)=0$$

*Odtud plyne:*

*a)* $\left(x-2\right)=0$*, čili* $x\_{1}=2$

*b)* $\left(x^{2}+2x+4\right)=0,$ *čili* $x\_{2,3}=\frac{-2\pm \sqrt{4-16}}{2}=-1\pm i\sqrt{3}$

*c)* $\left(x+2\right)=0,$ *čili* $x\_{4}=-2$

*d)* $\left(x^{2}-2x+4\right)=0,$ *čili* $x\_{5,6}=\frac{2\pm \sqrt{4-16}}{2}=1\pm i\sqrt{3}$

*II. způsob:*

*Rovnici budeme řešit goniometricky. 64 převedeme na pravou stranu rovnice a vyjádříme v goniometrickém tvaru.*

$$64=64\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)$$

*Podle vztahu z teorie pro určení kořenů binomické rovnice platí:*

$$x\_{k}=\sqrt[6]{64}\left(\cos(\frac{2kπ}{6}+i\sin(\frac{2kπ}{6}))\right)=2\left(\cos(\frac{kπ}{3}+i\sin(\frac{kπ}{3}))\right), k=0;1;2;3;4;5$$

$$x\_{0}=2\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)=2$$

$$x\_{1}=2\left(\cos(\frac{π}{3}+i\sin(\frac{π}{3}))\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$

$$x\_{2}=2\left(\cos(\frac{2π}{3}+i\sin(\frac{2π}{3}))\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$$

$$x\_{3}=2\left(\cos(π+i\sin(π))\right)=-2$$

$$x\_{4}=2\left(\cos(\frac{4π}{3}+i\sin(\frac{4π}{3}))\right)=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3}$$

$$x\_{5}=2\left(\cos(\frac{5π}{3}+i\sin(\frac{5π}{3}))\right)=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$$

**2) V množině komplexních čísel řešte rovnici** $\left(z^{3}-i\right)\left(z^{5}-1\right)=0 $**a kořeny znázorněte v Gaussově rovině.**

*Řešení:*

*Jedná se o rovnici v součinovém tvaru, musíme tedy vyřešit dvě binomické rovnice.*

*a)*

$z^{3}-i=0 $

$$z^{3}=i$$

$$z^{3}=1\left(\cos(\frac{π}{2}+i\sin(\frac{π}{2}))\right)$$

$$z\_{k}=\sqrt[3]{1}\left(\cos(\frac{\frac{π}{2}+2kπ}{3}+i\sin(\frac{\frac{π}{2}+2kπ}{3}))\right)=\left(\cos(\frac{π+4kπ}{6})+i\sin(\frac{π+4kπ}{6})\right), k=0;1;2$$

$$z\_{0}=\left(\cos(\frac{π}{6}+i\sin(\frac{π}{6}))\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$z\_{1}=\left(\cos(\frac{5π}{6}+i\sin(\frac{5π}{6}))\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$$

$$z\_{2}=\left(\cos(\frac{9π}{6}+i\sin(\frac{9π}{6}))\right)=\left(\cos(\frac{3π}{2}+i\sin(\frac{3π}{2}))\right)=-i$$

*Tyto kořeny tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka, který je vepsán do kružnice o poloměru 1. (na obr. znázorněn hnědě)*

*b)*

$$z^{5}-1=0$$

$$z^{5}=1$$

$$z^{5}=1\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)$$

$$z\_{k}=\sqrt[5]{1}\left(\cos(\frac{2kπ}{5}+i\sin(\frac{2kπ}{5}))\right), k=0;1;2;3;4$$

$$z\_{0}=\left(\cos(0)+i\sin(0)\right)=1$$

$$z\_{1}=\left(\cos(\frac{2π}{5})+i\sin(\frac{2π}{5})\right)=\left(\cos(72°+i\sin(72°))\right)$$

$$z\_{2}=\left(\cos(\frac{4π}{5})+i\sin(\frac{4π}{5})\right)=\left(\cos(144°+i\sin(144°))\right)$$

$$z\_{3}=\left(\cos(\frac{6π}{5})+i\sin(\frac{6π}{5})\right)=\left(\cos(216°+i\sin(216°))\right)$$

$$z\_{4}=\left(\cos(\frac{8π}{5})+i\sin(\frac{8π}{5})\right)=\left(\cos(288°+i\sin(288°))\right)$$

*Tyto kořeny tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníka, který je vepsán do kružnice o poloměru 1. (na obr. znázorněn zeleně)*

*Grafické znázornění v Gaussově rovině:*

**

**3) V množině komplexních čísel řešte rovnici** $x^{4}\left(3-2i\right)+2+3i=0$ **a kořeny znázorněte v Gaussově rovině.**

*Řešení:*

*Rovnici upravíme.*

$$x^{4}=\frac{-2-3i}{3-2i}$$

*Na pravé straně nejdříve určíme podíl dvou komplexních čísel.*

$$\frac{-2-3i}{3-2i}=\frac{\left(-2-3i\right)\left(3+2i\right)}{\left(3-2i\right)\left(3+2i\right)}=\frac{-6-9i-4i+6}{13}=-i$$

*Získáme binomickou rovnici. Tu budeme řešit goniometricky.*

$$x^{4}=-i$$

$$x^{4}=1\left(\cos(\frac{3π}{2}+i\sin(\frac{3π}{2}))\right)$$

$$x\_{k}=\sqrt[4]{1}\left(\cos(\frac{\frac{3π}{2}+2kπ}{4}+i\sin(\frac{\frac{3π}{2}+2kπ}{4}))\right)=\left(\cos(\frac{3π+4kπ}{8}+i\sin(\frac{3π+4kπ}{8}))\right), k=0;1;2;3$$

$$x\_{0}=\cos(\frac{3π}{8}+i\sin(\frac{3π}{8}))$$

$$x\_{1}=\cos(\frac{7π}{8}+i\sin(\frac{7π}{8}))$$

$$x\_{2}=\cos(\frac{11π}{8}+i\sin(\frac{11π}{8}))$$

$$x\_{3}=\cos(\frac{15π}{8}+i\sin(\frac{15π}{8}))$$

*Grafické znázornění kořenů v Gaussově rovině:*

**

**4) Je dán pravidelný pětiúhelník se středem v počátku, jedním jeho vrcholem je obraz komplexního čísla -2i. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou zbývající vrcholy pětiúhelníka.**

*Řešení:*

*Komplexní číslo -2i a ostatní komplexní čísla jsou kořeny binomické rovnice:*

$$z^{5}=\left(-2i\right)^{5} ⟺ z^{5}=-32i$$

*Rovnici řešíme goniometricky.*

$$z^{5}=-32i$$

$$z^{5}=32\left(\cos(\frac{3π}{2}+i\sin(\frac{3π}{2}))\right)$$

$$z\_{k}=\sqrt[5]{32}\left(\cos(\frac{\frac{3π}{2}+2kπ}{5}+i\sin(\frac{\frac{3π}{2}+2kπ}{5}))\right)=2\left(\cos(\frac{3π+4kπ}{10}+i\sin(\frac{3π+4kπ}{10}))\right), $$

$$k=0;1;2;3;4$$

$$z\_{0}=2\left(\cos(\frac{3π}{10}+i\sin(\frac{3π}{10}))\right)$$

$$z\_{1}=2\left(\cos(\frac{7π}{10}+i\sin(\frac{7π}{10}))\right)$$

$$z\_{2}=2\left(\cos(\frac{11π}{10}+i\sin(\frac{11π}{10}))\right)$$

$$z\_{3}=2\left(\cos(\frac{15π}{10}+i\sin(\frac{15π}{10}))\right)=2\left(\cos(\frac{3π}{2}+i\sin(\frac{3π}{2}))\right)=-2i$$

$$z\_{4}=2\left(\cos(\frac{19π}{10}+i\sin(\frac{19π}{10}))\right)$$

Příklady k procvičování:

1) V množině komplexních čísel řešte rovnici $x^{3}+2=0.$ Kořeny vyjádřete v goniometrickém i algebraickém tvaru.

správné řešení:

$$x\_{0}=\sqrt[3]{2}\left(\cos(\frac{π}{3})+i\sin(\frac{π}{3})\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}+\frac{\sqrt[6]{108}}{2}i$$

$$x\_{1}=\sqrt[3]{2}\left(\cos(π+i\sin(π))\right)=\sqrt[3]{2}\left(-1+i0\right)=-\sqrt[3]{2}$$

$$x\_{2}=\sqrt[3]{2}\left(\cos(\frac{5π}{3}+i\sin(\frac{5π}{3}))\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-\frac{\sqrt[6]{108}}{2}i$$

2) V množině komplexních čísel řešte rovnici $\left(z^{4}+16\right)\left(z^{3}-8i\right)=0$. Kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

správné řešení:

$$z\_{0}=2\left(\cos(\frac{π}{4}+i\sin(\frac{π}{4}))\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$z\_{1}=2\left(\cos(\frac{3π}{4}+i\sin(\frac{3π}{4}))\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$z\_{2}=2\left(\cos(\frac{5π}{4}+i\sin(\frac{5π}{4}))\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

$$z\_{3}=2\left(\cos(\frac{7π}{4}+i\sin(\frac{7π}{4}))\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

$$z\_{0}=2\left(\cos(\frac{π}{6}+i\sin(\frac{π}{6}))\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i$$

$$z\_{1}=2\left(\cos(\frac{5π}{6}+i\sin(\frac{5π}{6}))\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$$

$$z\_{2}=2\left(\cos(\frac{3π}{2}+i\sin(\frac{3π}{2}))\right)=2\left(0-i\right)=-2i$$

**

3) V množině komplexních čísel řešte rovnici $x^{6}∙i+1-i=0$ a kořeny znázorněte v Gaussově rovině.

správné řešení:

absolutní hodnota všech kořenů je $\sqrt[12]{2}$, jejich argumenty jsou $\frac{π}{24}; \frac{3π}{8}; \frac{17π}{24}; \frac{25π}{24}; \frac{11π}{8}; \frac{41π}{24}$



4) Je dán pravidelný devítiúhelník se středem v počátku, jedním jeho vrcholem je obraz komplexního čísla 3i. Určete komplexní čísla, jejichž obrazy jsou zbývající vrcholy devítiúhelníka.

správné řešení:

zbývající vrcholy jsou obrazy komplexních čísel s argumenty $\frac{π}{18}; \frac{5π}{18}; \frac{13π}{18}; \frac{17π}{18}; \frac{7π}{6}; \frac{25π}{18}; \frac{29π}{18}; \frac{11π}{6}$ a absolutní hodnotou 3

Použité zdroje a literatura:

CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.