

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ÚLOHY DIFERENCIÁLNÍHO A INTEGRÁLNÍHO POČTU S FYZIKÁLNÍM NÁMĚTEM**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština4. duben 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá úlohy infinitezimálního počtu s fyzikálním námětem |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Úlohy diferenciálního a integrálního počtu s fyzikálním námětem**

**Příklad 1**

Hmotný bod koná přímočarý pohyb tak, že pro dráhu uraženou za dobu (od počátečního okamžiku t0 = 0 s) platí rovnice . Určete velikost okamžité rychlosti tohoto nerovnoměrného pohybu v čase a její hodnoty v okamžicích t1= 1 s a t2 = 8 s.

***Řešení***

 Hledaná velikost okamžité rychlosti nerovnoměrného pohybu je první derivací dráhy podle času, tedy

 V čase t1 = 1 s je a v čase t2 = 8 s je .

**Příklad 2**

K baterii o elektromotorickém napětí 10*V* a vnitřním odporu 2 Ω je připojený spotřebič. Při jakém odporu spotřebiče bude jeho příkon maximální?

***Řešení***

 pro

Ohmův zákon pro uzavřený obvod napíšeme ve tvaru a vztah pro výkon proudu v tomto obvodu je

Tento vztah zderivujeme podle *R* (vzhledem k němu určujeme maximální příkon). Tedy

Nyní tuto derivaci položíme rovnu 0 a určíme extrémy funkce P(R). Získáváme dvě řešení a to a . První řešení nemá fyzikální smysl můžeme uvažovat pouze druhé řešení, tedy maximální příkon bude při R = 2 Ω.

**Příklad 3**

Určete, kdy jsou si nejblíže předmět a skutečný obraz vytvořený spojnou čočkou o dané ohniskové vzdálenosti *f*.

***Řešení***

Nejdříve provedeme přeznačení veličin, aby nedošlo k záměně nebo mýlce při určování derivace.

 … předmětová vzdálenost, … obrazová vzdálenost

Podle zadání mají být předmět a obraz co nejblíže. Proto si označíme a budeme hledat extrémy funkce v závislosti na nebo na .

Pro zobrazování čočkou platí zobrazovací rovnice

odkud si vyjádříme např. neznámou pomocí druhé neznámé . Tedy

dosadíme do funkce

a budeme derivovat podle . Takže

Tato derivace nabývá svého minima pro – ale to nemá fyzikální smysl, nebo pro a to už smysl má. Zbývá dopočítat obrazovou vzdálenost a dostaneme výsledek

.

Předmět a skutečný obraz mají nejmenší vzdálenost pro předmětovou vzdálenost , obraz se nachází ve vzdálenosti od čočky.

**Příklad 4**

Určete práci potřebnou k vynesení družice o hmotnosti 250 kgdo výšky 300 kmnad povrch Země. Hmotnost Země je M = 5,98 1024 kg, poloměr Země R = 6378 kma gravitační konstanta κ = 6,6710-11 Nm2 kg-2 . Při řešení neuvažujte kinetickou energii družice.

***Řešení***

 Z Newtonova gravitačního zákona vyplývápro velikost gravitační síly vztah

 Pro velikost práce, kterou budeme konat proti působení gravitační síly, platí

 Proto stačí dosadit a získáme

 Je potřeba vykonat práci 7,4·108 J.

**Příklad 5**

Určete dráhu , kterou urazí hmotný bod při přímočarém pohybu rovnoměrně zrychleném se zrychlením , je-li v čase jeho velikost rychlosti a dráha .

***Řešení***

 Dráha tělesa (nebo hmotného bodu) při jeho přímočarém pohybu v časovém intervalu s rychlostí o velikosti je daná vztahem

 V našem případě bude

kde

**Příklady k procvičení**

1. Silnice, která má šířku 8 m, je osvětlovaná lampou, která je nad osou silnice. V jaké výšce nad silnicí musí být lampa, aby byl okraj silnice co nejvíce osvětlený?
2. Základna nakloněné roviny má délku *d*. Určete výšku nakloněné roviny (při konstantním *d*) tak, aby kulička o hmotnosti *m* sjela z vrcholu nakloněné roviny v co nejkratším čase. Tření a odpor vzduchu zanedbejte.
3. Určete práci vykonanou silou o velikosti () při vychýlení tělesa na pružině z polohy do polohy .
4. Vypočítejte dráhu, kterou urazí hmotný bod mezi první a čtvrtou sekundou svého pohybu, mění-li se jeho rychlost podle vztahu .

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-363-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.