

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**UŽITÍ URČITÉHO INTEGRÁLU PŘI VÝPOČTU OBSAHU ROVINNÝCH ÚTVARŮ A OBJEMU ROTAČNÍCH TĚLES**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk**  **Datum vytvoření** | čeština  15. 3. 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem určitého integrálu a umí jej aplikovat při výpočtu obsahu rovinných útvarů |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Užití určitého integrálu při výpočtu obsahu rovinných útvarů a objemu rotačních těles**

**Úvod**

1. Pro obsah rovinného ***S*** útvaru *U* omezeného osou *x* o rovnici *y* = 0, přímkami *x = a, x = b* a grafem spojité nezáporné funkce v uzavřeném intervalu použijeme vztah
2. Nabývá-li integrovaná funkce *f* v intervalu nekladných hodnot, pak . Proto pro obsah útvaru *U* platí vztah
3. Obsah obrazce ohraničeného grafy spojitých funkcí *f, g* a přímkami o rovnicích *x = a, x = b* nebo jen grafy spojitých funkcí *f, g* vypočteme pomocí vztahu
4. Rotací útvaru *U* omezeného osou *x* o rovnici *y* = 0, přímkami o rovnicích *x = a, y = b* a grafem spojité nezáporné funkce *f (x)* v uzavřeném intervalu okolo osy *x* vznikne rotační těleso. Jeho objem určíme užitím vztahu

**Příklad 1**

Vypočítejte obsah rovinného obrazce, který je omezený grafy funkcí a .

***Řešení***

Nejprve určíme *x*- ové souřadnice průsečíků obou grafů. Získáme je řešením rovnice a dále tím získáme dolní a horní mez určitého integrálu. Tedy

V intervalu je graf funkce *f* nad grafem funkce *g* a proto od plochy pod grafem funkce *f* musíme odečíst plochu pod grafem funkce *g*. Tedy:

**Příklad 2**

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafem funkce v intervalu a osou *x*.

***Řešení***

Obsah tohoto obrazce je

**Příklad 3**

Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí .

***Řešení***

Nejprve určíme *x*- ové souřadnice průsečíků obou grafů. Získáme je řešením rovnice a dále tím získáme dolní a horní mez určitého integrálu. Tedy

V intervalu je graf funkce *f* nad grafem funkce *g* a proto od plochy pod grafem funkce *f* musíme odečíst plochu pod grafem funkce *g*. Tedy:

**Příklad 4**

Vypočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru omezeného křivkou , okolo osy *x*.

***Řešení***

Objem tohoto tělesa vypočítáme

**Úlohy k procvičení**

1. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného parabolou o rovnici a osou *x*.
2. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí .
3. Vypočítejte obsah obrazce ohraničeného grafy funkcí .
4. Vypočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací útvaru omezeného křivkou , okolo osy *x*.

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

HRUBÝ, Dag a KUBÁT, Josef. *Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-363-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.