

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ A JEJICH UŽITÍ**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Iva Kašparová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 18. 1. 2014 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem lokální a globální extrémy funkce a jejich využití, počítá extrémy funkce a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**LOKÁLNÍ A GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCÍ A JEJICH UŽITÍ**

**Příklad 1**

**Vyšetřete monotónnost a lokální extrémy funkce:.**

*Řešení:*

*Nejprve určíme první derivaci funkce f: .*

*Hledáme stacionární body:*  = 0

  = 0

  = 0

  = 0

 * = 0*

***Stacionární body tedy jsou: x1 = 1, x2 = -2.***

*Dosazením z intervalu dostaneme:*

1. *pro platí: f ´(x) < 0 ⇒ je zde funkce* ***klesající.***
2. *pro platí: f ´(x) < 0 ⇒ je zde funkce* ***klesající.***
3. *pro platí: f ´(x) > 0 ⇒ je zde* funkce **rostoucí.**

***To znamená, že funkce má v bodě 1 lokální minimum f(1) = .***

*Také pomocí druhé derivace  platí: > 0 ⇒ je zde lokální minimum.*

***V bodě -2 lokální extrém nemá.***

*Také pomocí druhé derivace  platí: > 0 ⇒ není zde lokální extrém.*

**Příklad 2**

**Najděte globální (absolutní ) extrémy funkce .**

1. **v intervalu ,**
2. **v intervalu ,**
3. ***v množině R.***

*Řešení:*

1. *Derivace funkce* *******je spojitá v každém bodě v R.*

*Zjistíme stacionární body: *

 **

***Stacionární body tedy jsou: x1 = 0, x2 = 1,5. Z intervalu je jen x2 = 1,5.***

*Druhá derivace* ******

*Platí tedy****:*** *f´´****(1,5) = 9 > 0 ⇒ je zde lokální minimum.***

***Protože na intervalu má funkce f spojitou derivaci a v bodě 1,5 je stacionární bod, je v bodě 1,5 také globální minimum. Globální maximum v intervalu  funkce nemá.***

1. ***V uzavřeném intervalu*** *může funkce nabývat globálního extrému v krajních bodech intervalu nebo ve stacionárních bodech.*

***V bodě 1,5 je globální minimum.***

*Dále platí f(1) = 0, f(2) = 1 ⇒* ***funkce nabývá globálního maxima v bodě 2.***

1. *V množině R zbývá vyšetřit stacionární bod* ***0.***

*f´´(0) = 0 ⇒* ***není zde extrém.***

***Tedy funkce f má v množině R globální minimum v bodě 1,5 a globální maximum nemá.***

**Příklad 3**

**Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkce .**

*Řešení:*

*Derivace funkce:.*

*Stacionární body:* 



 

V intervaluje f´ < 0 ⇒ funkce f je zde klesající.



> 0 ⇒ funkce f zde nabývá lokální minimum.

V intervaluje f´ > 0 ⇒ funkce f je zde rostoucí.

> 0 ⇒ funkce f zde nabývá lokální maximum.

V intervaluje f´ < 0 ⇒ funkce f je zde klesající.

***Platí tedy, že funkce  je rostoucí v intervalu ***

***a klesající v intervalech  a .***

***Dále má v bodě lokální minimum a v bodě lokální maximum.***

**UŽITÍ LOKÁLNÍCH EXTRÉMŮ**

**Příklad 4**

**Na přímce p: y = 3x - 1 najděte bod, který má nejmenší vzdálenost od bodu A[1;-2].**

*Řešení:*

*X ϵ p ⇒ X [x; 3x-1]*

*Pro vzdálenost X a A platí: *

***Máme tedy funkci f: y ****a hledáme její* ***minimum.***

*f´: y = *

*Stacionární bod: *

 **

 **

*V intervalu je f´ kladná ⇒ funkce f je zde* ***rostoucí*** *,*

 *v  intervalu je f´ záporná ⇒ funkce f je zde* ***klesající****.*

 ***V bodě x1 = je tedy lokální minimum je bod ležící na přímce p a má minimální vzdálenost od A.***

**Příklad 5**

**Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.**

*Řešení:*

*Má platit: a + b = 28 (1)*

 *a.b je maximální (2)*

*Z (1) dostaneme a = 28 - b a po dosazení do (2) dostaneme (28 - b).b je maximální.*

*Máme tedy funkci f: y = (28 - b).b = 28b - b2*

*f´: y = 28 - 2b*

*Stacionární body: 28 - 2b = 0*

 *b = 14*

*f´´: y = -2 < 0 (vždy) ⇒ f má v bodě b = 14 maximum a platí:* ***a = 14, b = 14.***

**Úlohy k procvičení:**

1. *Určete hodnotu konstanty a ϵ R tak, aby funkce měla v bodě extrém. Určete druh extrému.*

*[a = 2 , lokální maximum]*

1. *Určete monotónnost funkce a lokální extrémy funkcí:*
2. **
3. **
4. **
5. ******
6. **

*[a) , v bodě 1 lokální maximum;*

*b), v bodě lokální maximum; c) rostoucí v R bez extrémů; d)  , v bodě -3 lokální minimum, v bodě 3 lokální maximum; e) extrémy nejsou, v bodě* $\frac{π}{2} je inflexe$*].*

*3) Určete globální extrémy funkce *

 *a) v intervalu (-1;4),*

 *b) v intervalu ,*

 *c) v množině R.*

*[a) minimum v bodě 0,maximum v bodě 3, b) minimum v bodě 0, maximum v bodě -2, c) minimum v bodech 0 a 6 , maximum nemá]*

1. *Určete hodnoty parametrů a,b ϵ R tak, aby funkce* *měla v bodě*

*minimum a jeho hodnota byla 4.*

*[a = ¼, b = -1].*

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Diferenciální a integrální počet*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.