

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 17. 11. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 18 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák zná definici hyperboly a její analytické vyjádření středovou i obecnou rovnicí, umí určit charakteristiky hyperboly, ovládá řešení úloh o vzájemné poloze přímky a hyperboly |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Napište středovou i obecnou rovnici hyperboly a obecné rovnice jejích asymptot, je-li dán střed hyperboly , vrchol a excentricita *e = 5.***

*Řešení:*

*Střed i vrchol leží na ose x, proto středovou rovnici hyperboly budeme hledat ve tvaru:*

*Určíme velikost hlavní poloosy:*

*Známe hlavní poloosu a excentricitu, vypočítáme velikost vedlejší poloosy:*

*Nyní můžeme napsat středovou rovnici hyperboly:*

*Umocníme, odstraníme zlomky a upravíme na obecnou rovnici:*

*Asymptoty dané hyperboly budou mít tvar: , po úpravách získáme jejich obecné rovnice:*

**2) Určete středové rovnice všech hyperbol, jejichž hlavní osa je 8, excentricita e = 5 a vrchol .**

*Řešení:*

*Hlavní osa je 8 ⇒ a = 4; nyní snadno vypočítáme b:*

*Zadání vyhovují 4 hyperboly, dvě mají hlavní osu rovnoběžnou s osou x a dvě mají hlavní osu rovnoběžnou s osou y.*

*Hyperbola H1: , A je vrcholem levé větve, střed S leží vpravo od A*

*Hyperbola H2: , A je vrcholem pravé větve, střed S leží vlevo od A*

*Hyperbola H3: , A je vrcholem horní větve, střed S leží pod A*

*Hyperbola H4: , A je vrcholem dolní větve, střed S leží nad A*

**3) Napište rovnici přímky, na níž leží tětiva hyperboly půlená bodem**

*Řešení:*

*Tětiva i se svým středem M leží na přímce p:*

*V rovnici přímky p potřebujeme určit směrnici k.*

*Proto budeme řešit soustavu rovnic s neznámými x, y a parametrem k.*

*Z rovnice přímky vyjádříme neznámou y a dosadíme do rovnice hyperboly a po úpravách získáme:*

*Rovnici podělíme výrazem , za předpokladu, že . Po úpravách získáme:*

*Kořeny x1 a x2 této rovnice jsou x-ové souřadnice krajních bodů tětivy.*

*Na základě vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice pro součet kořenů x1 a x2 platí:*

*Bod M je středem tětivy, proto platí:*

*Porovnáme pravé strany vztahů (1) a (2) a vypočítáme k:*

*Nyní již můžeme napsat rovnici hledané přímky:*

*směrnicový tvar:*

*obecná rovnice:*

**4) Proveďte úplnou diskuzi o vzájemné poloze hyperboly a přímky**

*Řešení:*

*Přímky rovnoběžné s asymptotami mají s hyperbolou jeden společný bod, proto je nutné zjistit, zda přímka p není rovnoběžná s některou asymptotou. Budeme tedy zjišťovat, zda normálový vektor přímky p je nebo není násobkem normálového vektoru některé asymptoty.*

*Asymptoty mají rovnice:*

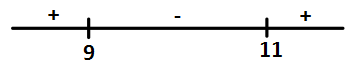
*Normálový vektor přímky p má souřadnice a není násobkem normálového vektoru žádné asymptoty ⇒ přímka p není rovnoběžná s ani jednou asymptotou.*

*Budeme hledat společné body hyperboly a přímky p ⇒ řešíme soustavu rovnic s neznámými x a y a parametrem c  R. Z rovnice přímky vyjádříme neznámou x a dosadíme do rovnice hyperboly.*

*Po úpravách dospějeme ke kvadratické rovnici s neznámou y a parametrem c:*

*Počet kořenů a tedy počet společných bodů hyperboly a přímky závisí na hodnotě diskriminantu. Vypočteme diskriminant:*

*Zjišťujeme, pro která c bude diskriminant kladný, pro která záporný a pro která roven 0.*

**

*Závěr:*

*přímka p je sečnou, má s hyperbolou 2 společné body*

*přímka p je nesečnou, nemá s hyperbolou žádné společné body*

*přímka p je tečnou, má s hyperbolou 1 společný bod*

*Můžeme ještě vypočítat souřadnice bodů dotyku.*

*c = 9 dosadíme do rovnice (3) ⇒*

*Z rovnice (1) určíme x-ovou souřadnici:*

*Přímka se dotýká hyperboly v bodě*

*c = 11 dosadíme do rovnice (3) ⇒*

*Z rovnice (1) určíme x-ovou souřadnici:*

*Přímka se dotýká hyperboly v bodě*

Příklady k procvičování:

1) Ukažte, že rovnice je rovnicí hyperboly. Potom určete polohu její hlavní poloosy, velikosti poloos, excentricitu, souřadnice středu, ohnisek, vrcholů, a rovnice asymptot.

(správné řešení:

2) Která tečna hyperboly tvoří na ose x úsek p = 4.

(správné řešení: )

3) Vypočtěte délku té tětivy hyperboly , která prochází jejím ohniskem kolmo k hlavní ose hyperboly.

(správné řešení: 4,5 j.d.)

4) Určete tečny hyperboly , které jsou rovnoběžné s přímkou

.

(správné řešení: 45)

5) Vypočítejte velikost úhlu, který svírají asymptoty hyperboly .

(správné řešení: )

6) Napište rovnice tečen z bodu k hyperbole .

(správné řešení: 5)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.