

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ANALYTICKÁ GEOMETRIE HYPERBOLY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 17. 11. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 18 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák zná definici hyperboly a její analytické vyjádření středovou i obecnou rovnicí, umí určit charakteristiky hyperboly, ovládá řešení úloh o vzájemné poloze přímky a hyperboly |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Napište středovou i obecnou rovnici hyperboly a obecné rovnice jejích asymptot, je-li dán střed hyperboly** $S\left[3;0\right]$**, vrchol** $A\left[-1; 0\right]$ **a excentricita *e = 5.***

*Řešení:*

*Střed i vrchol leží na ose x, proto středovou rovnici hyperboly budeme hledat ve tvaru:*

$$\frac{\left(x-m\right)^{2}}{a^{2}}-\frac{\left(y-n\right)^{2}}{b^{2}}=1$$

*Určíme velikost hlavní poloosy:* $a=\left|SA\right|=\sqrt{\left(3+1\right)^{2}+\left(0-0\right)^{2}}=4$

*Známe hlavní poloosu a excentricitu, vypočítáme velikost vedlejší poloosy:* $b=\sqrt{e^{2}-a^{2}}=\sqrt{25-16}=3$

*Nyní můžeme napsat středovou rovnici hyperboly:* $\frac{\left(x-3\right)^{2}}{16}-\frac{y^{2}}{9}=1 $

*Umocníme, odstraníme zlomky a upravíme na obecnou rovnici:* $9x^{2}-16y^{2}-54x-63=0$

*Asymptoty dané hyperboly budou mít tvar:* $\frac{x-3}{4}\pm \frac{y}{3}=0$*, po úpravách získáme jejich obecné rovnice:* $3x+4y-9=0 ;3x-4y-9=0$

**2) Určete středové rovnice všech hyperbol, jejichž hlavní osa je 8, excentricita e = 5 a vrchol** $A\left[3;-1\right]$**.**

*Řešení:*

*Hlavní osa je 8 ⇒ a = 4; nyní snadno vypočítáme b:* $b=\sqrt{e^{2}-a^{2}}=\sqrt{25-16}=3$

*Zadání vyhovují 4 hyperboly, dvě mají hlavní osu rovnoběžnou s osou x a dvě mají hlavní osu rovnoběžnou s osou y.*

*Hyperbola H1:* $a∥x$*, A je vrcholem levé větve, střed S leží vpravo od A* $⇒S\left[3+4; -1\right]=S\left[7; -1\right]$

$$\frac{\left(x-7\right)^{2}}{16}-\frac{\left(y+1\right)^{2}}{9}=1$$

*Hyperbola H2:* $a∥x$*, A je vrcholem pravé větve, střed S leží vlevo od A* $⇒S\left[3-4; -1\right]=S\left[-1; -1\right]$

$$\frac{\left(x+1\right)^{2}}{16}-\frac{\left(y+1\right)^{2}}{9}=1$$

*Hyperbola H3:* $a∥y$*, A je vrcholem horní větve, střed S leží pod A* $⇒S\left[3; -1-4\right]=S\left[3; -5\right]$

$$\frac{\left(y+5\right)^{2}}{16}-\frac{\left(x-3\right)^{2}}{9}=1$$

*Hyperbola H4:* $a∥y$*, A je vrcholem dolní větve, střed S leží nad A* $⇒S\left[3; -1+4\right]=S\left[3; 3\right]$

$$\frac{\left(y-3\right)^{2}}{16}-\frac{\left(x-3\right)^{2}}{9}=1$$

**3) Napište rovnici přímky, na níž leží tětiva hyperboly** $x^{2}-y^{2}=1 $**půlená bodem** $M\left[-2;1\right].$

*Řešení:*

*Tětiva i se svým středem M leží na přímce p:* $y-1=k\left(x+2\right)$

*V rovnici přímky p potřebujeme určit směrnici k.*

*Proto budeme řešit soustavu rovnic s neznámými x, y a parametrem k.*

*Z rovnice přímky vyjádříme neznámou y a dosadíme do rovnice hyperboly a po úpravách získáme:* $x^{2}\left(1-k^{2}\right)+x\left(-4k^{2}-2k\right)-4k^{2}-4k-2=0$

*Rovnici podělíme výrazem* $\left(1-k^{2}\right)$*, za předpokladu, že* $k\ne \pm 1$*. Po úpravách získáme:*

$$x^{2}+x\frac{2k\left(2k+1\right)}{k^{2}-1}+\frac{2\left(2k^{2}+2k+1\right)}{k^{2}-1}=0$$

*Kořeny x1 a x2 této rovnice jsou x-ové souřadnice krajních bodů tětivy.*

*Na základě vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice pro součet kořenů x1 a x2 platí:*

$$x\_{1}+x\_{2}=-\frac{2k\left(2k+1\right)}{k^{2}-1} \left(1\right)$$

*Bod M je středem tětivy, proto platí:* $\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2}=-2 ⇒ x\_{1}+x\_{2}=-4 \left(2\right)$

*Porovnáme pravé strany vztahů (1) a (2) a vypočítáme k:*

$$-\frac{2k\left(2k+1\right)}{k^{2}-1}=-4 ⇒2k^{2}+k-2k^{2}+2=0 ⇒k=-2$$

*Nyní již můžeme napsat rovnici hledané přímky:*

*směrnicový tvar:* $y=-2x-3$

*obecná rovnice:* $2x+y+3=0$

**4) Proveďte úplnou diskuzi o vzájemné poloze hyperboly** $2\left(x+2\right)^{2}-9\left(y-4\right)^{2}=18$ **a přímky** $p:x-2y+c=0, c\in R.$

*Řešení:*

*Přímky rovnoběžné s asymptotami mají s hyperbolou jeden společný bod, proto je nutné zjistit, zda přímka p není rovnoběžná s některou asymptotou. Budeme tedy zjišťovat, zda normálový vektor přímky p je nebo není násobkem normálového vektoru některé asymptoty.*

*Asymptoty mají rovnice:* $\sqrt{2}\left(x+2\right)\pm 3\left(y-4\right)=0 ⇒ \vec{n\_{1}}=\left(\sqrt{2};3\right) \vec{n\_{2}}=\left(\sqrt{2}; -3\right)$

*Normálový vektor přímky p má souřadnice* $\vec{n\_{p}}=\left(1; -2\right)$ *a není násobkem normálového vektoru žádné asymptoty ⇒ přímka p není rovnoběžná s ani jednou asymptotou.*

*Budeme hledat společné body hyperboly a přímky p ⇒ řešíme soustavu rovnic s neznámými x a y a parametrem c  R. Z rovnice přímky vyjádříme neznámou x a dosadíme do rovnice hyperboly.*

$$x=2y-c (1)$$

$$2\left(4y^{2}+c^{2}+4-4yc+8y-4c\right)-9\left(y^{2}-8y+16\right)-18=0 (2)$$

*Po úpravách dospějeme ke kvadratické rovnici s neznámou y a parametrem c:*

$$y^{2}+y\left(8c-88\right)+\left(154+8c-2c^{2}\right)=0 (3)$$

*Počet kořenů a tedy počet společných bodů hyperboly a přímky závisí na hodnotě diskriminantu. Vypočteme diskriminant:*

$$D=\left(8c-88\right)^{2}-4\left(154+8c-2c^{2}\right) ⇒ D=72\left(c^{2}-20c+99\right)=72\left(c-9\right)\left(c-11\right)$$

*Zjišťujeme, pro která c bude diskriminant kladný, pro která záporný a pro která roven 0.*

**

*Závěr:*

$c\in \left(-\infty ;9\right)∪\left(11; \infty \right):D>0⇒$ *přímka p je sečnou, má s hyperbolou 2 společné body*

$c\in \left(9;11\right):D<0 ⇒ $*přímka p je nesečnou, nemá s hyperbolou žádné společné body*

$c\in \left\{9;11\right\}:D=0 ⇒ $*přímka p je tečnou, má s hyperbolou 1 společný bod*

*Můžeme ještě vypočítat souřadnice bodů dotyku.*

*c = 9 dosadíme do rovnice (3) ⇒* $y^{2}-16y+64=0 ⇒ \left(y-8\right)^{2}=0 ⇒y=8$

*Z rovnice (1) určíme x-ovou souřadnici:* $x=7$

*Přímka* $p:x-2y+9=0$ *se dotýká hyperboly v bodě* $T\left[7;8\right]$

*c = 11 dosadíme do rovnice (3) ⇒* $y^{2}=0 ⇒ y=0$

*Z rovnice (1) určíme x-ovou souřadnici:* $x=-11$

*Přímka* $p:x-2y+11=0$ *se dotýká hyperboly v bodě* $T\left[-11;0\right]$

Příklady k procvičování:

1) Ukažte, že rovnice $4x^{2}-9y^{2}+16x-18y-29=0 $je rovnicí hyperboly. Potom určete polohu její hlavní poloosy, velikosti poloos, excentricitu, souřadnice středu, ohnisek, vrcholů, a rovnice asymptot.

(správné řešení: $ \frac{\left(x+2\right)^{2}}{9}-\frac{\left(y+1\right)^{2}}{4}=1; a∥x; a=3;b=2;e=\sqrt{13}$

$$S\left[-2; -1\right];E\left[-2-\sqrt{13}; -1\right];F\left[-2+\sqrt{13}; -1\right];A\left[-5; -1\right];B\left[1; -1\right]$$

$$2x+3y+7=0;2x-3y+1=0)$$

2) Která tečna hyperboly $ 9x^{2}-25y^{2}=225$ tvoří na ose x úsek p = 4.

(správné řešení: $x-y-4=0;x+y-4=0$)

3) Vypočtěte délku té tětivy hyperboly $9x^{2}-16y^{2}-36x+32y-124=0$, která prochází jejím ohniskem kolmo k hlavní ose hyperboly.

(správné řešení: 4,5 j.d.)

4) Určete tečny hyperboly $9x^{2}-4y^{2}=324$, které jsou rovnoběžné s přímkou

$p:45x+4y-180=0$.

(správné řešení: 45$x+4y\pm 18\sqrt{221}=0$)

5) Vypočítejte velikost úhlu, který svírají asymptoty hyperboly $16x^{2}-25y^{2}=400$.

(správné řešení: $φ=77°19´$)

6) Napište rovnice tečen z bodu $M\left[\frac{3}{5}; -4\right]$ k hyperbole $16x^{2}-9y^{2}=144$.

(správné řešení: 5$x+3y+9=0, 20x-9y-48=0$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.