

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ANALYTICKÁ GEOMETRIE ELIPSY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 14. 10. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 18 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák zná definici elipsy a způsoby jejího analytického vyjádření; umí určit charakteristické veličiny elipsy; zná vztah pro tečnu elipsy a umí řešit úlohy o vzájemné poloze přímky a elipsy |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Ukažte, že rovnice**$ 169x^{2}+144y^{2}-676x+288y-23 516=0$ **je obecnou rovnicí elipsy. Určete její polohu v soustavě souřadné, střed, ohniska a vrcholy.**

*Řešení:*

*Obecnou rovnici elipsy upravíme na osový tvar:*

$$169\left(x^{2}-4x\right)+144\left(y^{2}+2y\right)-23 516=0$$

$$169\left(x-2\right)^{2}-676+144\left(y+1\right)^{2}-144-23 516=0$$

$$169\left(x-2\right)^{2}+144\left(y+1\right)^{2}=24 336$$

$$\frac{\left(x-2\right)^{2}}{144}+\frac{\left(y+1\right)^{2}}{169}=1$$

*Z rovnice vyčteme:*

 *- střed elipsy* $S\left[2;-1\right]$

 *- velikost hlavní poloosy a = 13 a vedlejší poloosy b = 12*

 *- poznáme, že hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou y*

*Vypočítáme excentricitu e:* $e=\sqrt{a^{2}-b^{2}}=\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$

*Určíme hlavní vrcholy:* $A\left[2;-1-13\right]⇒A\left[2;-14\right];B\left[2;-1+13\right]⇒B\left[2;12\right]$

*Určíme vedlejší vrcholy:* $C\left[2-12;-1\right]⇒C\left[-10;-1\right];D\left[2+12;-1\right]⇒B\left[14;-1\right]$

*Určíme ohniska:* $E\left[2;-1-5\right]⇒E\left[2;-6\right];F\left[2;-1+5\right]⇒F\left[2;4\right]$

**2) Určete velikost úhlu ϕ, pod kterým je z bodu** $A\left[0;-3\right]$ **vidět elipsu** $E:5x^{2}+9y^{2}=45.$

*Řešení:*

*Úhel ϕ je úhel, který svírají tečny vedené z bodu A k elipse E.*

*Tečny budeme hledat ve tvaru:* $5xx\_{T}+9yy\_{T}=45$

*Bod A na tečně leží:* $ 5∙0∙x\_{T}+9∙\left(-3\right)∙y\_{T}=45⇒y\_{T}=-\frac{5}{3}$

*Určili jsme y-ovou souřadnici bodu dotyku. Musíme určit ještě jeho x-ovou souřadnici. Určíme z podmínky, že bod T je zároveň i bodem elipsy E:*

$$5x\_{T}^{2}+9∙\left(-\frac{5}{3}\right)^{2}=45⇒x\_{T}^{2}=4⇒x\_{T}=\pm 2$$

*Body dotyku existují dva:* $T\_{1}\left[2;-\frac{5}{3}\right] a T\_{2}\left[-2;-\frac{5}{3}\right]$

*Souřadnice bodů dotyku dosadíme do vztahu pro tečnu elipsy E, získáme obecné rovnice dvou tečen a zapíšeme jejich normálové vektory:*

$$t\_{1}:10x-15y=45⇒2x-3y-15=0 ⇒ \vec{n\_{1}}=\left(2;-3\right)$$

$$t\_{2}:-10x-15y=45⇒2x+3y+15=0 ⇒ \vec{n\_{2}}=\left(2;3\right)$$

*Určíme úhel ϕ:*

$$\cos(φ)=\frac{\vec{n\_{1}}∙\vec{n\_{2}}}{\left|\vec{n\_{1}}\right|∙\left|\vec{n\_{2}}\right|}= \frac{4-9}{\sqrt{13}∙\sqrt{13}}= -\frac{5}{13}⇒φ=112°37´$$

*Elipsa E je z bodu A vidět pod úhlem* $φ=112°37´$*.*

**3) Do elipsy** $E: \frac{x^{2}}{9}+y^{2}=1$ **je vepsán rovnostranný trojúhelník souměrný podle její hlavní osy. Určete souřadnice jeho vrcholů.**

*Řešení:*

*Jak ukazuje obrázek, takové trojúhelníky existují dva a jsou navzájem souměrné podle osy y. Úlohu tedy budeme řešit pouze pro trojúhelník KLM.*

*Vrchol K je totožný s hlavním vrcholem elipsy* $⇒K\left[3;0\right]$*.*

*Zbývají vrcholy L, M mají stejnou x-ovou souřadnici a jejich y-ové souřadnice jsou opačná čísla* $⇒L\left[x;y\right];M\left[x;-y\right]$*.*

*Trojúhelník KLM je rovnostranný* $⇒ \left|KL\right|=\left|KM\right|=\left|LM\right|$

$$\left|KL\right|=\left|LM\right|$$

$$\sqrt{\left(x-3\right)^{2}+\left(y-0\right)^{2}}=\sqrt{\left(x-x\right)^{2}+\left(y+y\right)^{2}}$$

$$\sqrt{x^{2}-6x+9+y^{2}}=\sqrt{4y^{2}}$$

$$x^{2}-6x+9=3y^{2}$$

$$y^{2}=\frac{x^{2}-6x+9}{3}①$$

*Souřadnice bodů L, M musí vyhovovat rovnici elipsy E, proto vyjádření ① dosadíme do rovnice elipsy ⇒*

$$\frac{x^{2}}{9}+\frac{x^{2}-6x+9}{3}=1$$

$$x^{2}+3x^{2}-18x+27=9$$

$$4x^{2}-18x+18=0$$

$$2x^{2}-9x+9=0 ⇒ x\_{1,2}=\frac{9\pm \sqrt{81-72}}{4} ⇒ x\_{1}=3; x\_{2}=\frac{3}{2}$$

*Ke každému x pomocí vztahu ① dopočítáme y* $⇒ y\_{1}=0; y\_{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}; y\_{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

*Vrcholy trojúhelníka KLM mají souřadnice:* $K\left[3;0\right];L\left[\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right];M\left[\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$

*Trojúhelník k němu souměrný podle osy y má vrcholy:* $\left[-3;0\right];\left[-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right];\left[-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right].$

**4) Určete parametr b  R∧ b ≠ 0 tak, aby přímka p byla tečnou elipsy E:**

**p: 2x + 3y – 12 = 0; E: b2x2 + 25y2 = 25b2.**

*Řešení:*

*Z rovnice přímky vyjádříme neznámou y a toto vyjádření dosadíme do rovnice elipsy.*

$$y=\frac{12-2x}{3}$$

$$b^{2}x^{2}+25∙\frac{144-48x+4x^{2}}{9}=25b^{2}①$$

*Rovnici ① upravíme na kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem* $b\in R-\left\{0\right\}.$

$$x^{2}\left(100+9b^{2}\right)-1 200x+3 600-225b^{2}=0 ②$$

*Protože přímka p má být tečnou elipsy E, musí mít rovnice ② jediné řešení; jediné řešení bude právě tehdy, když diskriminant bude roven 0.*

$$1 200^{2}-4∙\left(100+9b^{2}\right)∙\left(3 600-225b^{2}\right)=0$$

*Po úpravách dostaneme:*$ 9b^{4}-44b^{2}=0 ⇒ b^{2}\left(9b^{2}-44\right)=0 ⇒ b\_{1,2}=\pm \frac{2\sqrt{11}}{3}$

*Protože b představuje velikost hlavní poloosy, tak řešením je pouze* $b=\frac{2\sqrt{11}}{3}$*.*

Příklady k procvičování:

1) Napište rovnici elipsy, která se osy x dotýká v bodě $X\left[-4;0\right]$ a osy y v bodě $Y\left[0;5\right].$

(správné řešení: $\frac{\left(x+4\right)^{2}}{16}+\frac{\left(y-5\right)^{2}}{25}=1$)

2) Napište rovnice tečen elipsy $E:4x^{2}+9y^{2}=36$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p:x-y-6=0.$

(správné řešení: $x-y-\sqrt{13}=0;x-y+\sqrt{13}=0$)

3) Napište rovnice tečen elipsy $E:9x^{2}+16y^{2}=144,$ které mají směrnici $k=1.$

(správné řešení: $x-y\pm 5=0 nebo y=x\pm 5$)

4) Napište rovnici elipsy, která prochází bodem $A\left[-4; \sqrt{21}\right]$, její ohniska leží na ose x, excentricita e = 6 a její osy leží na souřadnicových osách x a y.

(správné řešení:$\frac{x^{2}}{64}+\frac{y^{2}}{28}=1$)

5) Vypočítejte délku tětivy, kterou na elipse $9x^{2}+25y^{2}-54x-100y-44=0$ vytíná osa II. a IV. kvadrantu.

(správné řešení: $\frac{45}{17}\sqrt{2}$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.