

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**KRUŽNICE, KRUH, KULOVÁ PLOCHA, KOULE**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 4. 10. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 18 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák umí analyticky vyjádřit kružnici, kruh, kulovou plochu a kouli; zná vzájemnou polohu kružnice a přímky, kulové plochy a roviny; umí určit tečnu kružnice; vztahy umí aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Ukažte, že přímka *p* procházející společnými body kružnic *k* a *l* je kolmá na přímku *s* proloženou středy obou kružnic.** $k: x^{2}+y^{2}-25=0;l: x^{2}+y^{2}-10x-20y+25=0$

*Řešení:*

*Obecné rovnice obou kružnic upravíme na středový tvar a určíme souřadnice jejich středů:*

$$k: x^{2}+y^{2}=25 ⟹S\_{1}\left[0;0\right]$$

$$l: \left(x-5\right)^{2}-25+\left(y-10\right)^{2}-100+25=0$$

$$\left(x-5\right)^{2}+\left(y-10\right)^{2}=100 ⇒S\_{2}\left[5;10\right]$$

*Určíme souřadnice směrového vektoru přímky s:* $S\_{2}-S\_{1}=\left(5;10\right)∼\left(1;2\right)$

Společné body obou kružnic najdeme, řešíme-li soustavu rovnic:

$x^{2}+y^{2}-25=0 $ *druhou rovnici odečteme od první*

$$x^{2}+y^{2}-10x-20y+25=0$$

$$10x+20y-50=0$$

$x+2y-5=0 ⇒x=5-2y$ *dosadíme za x do první rovnice soustavy*

$$\left(5-2y\right)^{2}+y^{2}-25=0$$

$$25-20y+4y^{2}+y^{2}-25=0$$

$5y\left(y-4\right)=0 ⇒ y\_{1}=0 y\_{2}=4$ *ke každému y dopočítáme xa zapíšeme společné body obou kružnic*

$$A\left[5;0\right] B\left[-3;4\right]$$

*Určíme souřadnice směrového vektoru přímky p:* $B-A=\left(-8;4\right)∼\left(-2;1\right)$

*Jsou-li přímky p a s kolmé, musí být skalární součin jejich směrových vektorů roven 0.*

$$\left(1;2\right)∙\left(-2;1\right)= -2+2=0$$

**2) Určete tečnu kružnice**$k: x^{2}+y^{2}-6x+10y-66=0$**, která je kolmá k přímce**

***p: 4x – 3y + 12 = 0.***

*Řešení:*

$$t ⊥p ⇒ \vec{n\_{t}}= \left(3;4\right) ⇒t:3x+4y+c=0$$

*Aby přímka t byla tečnou, musí mít od ní střed kružnice vzdálenost rovnou poloměru kružnice.*

*Určíme tedy souřadnice středu kružnice a její poloměr ⇒ obecnou rovnici kružnice převedeme na středový tvar.*

$$x^{2}+y^{2}-6x+10y-66=0 \rightarrow \left(x-3\right)^{2}-9+\left(y+5\right)^{2}-25-66=0 \rightarrow \left(x-3\right)^{2}+\left(y+5\right)^{2}=100 ⇒S\left[3; -5\right], r=10 $$

*Použijeme vztah pro určení vzdálenosti bodu od přímky:*

$$\left|St\right|=10 ⇒ \frac{\left|3∙3+4∙\left(-5\right)+c\right|}{\sqrt{3^{2}+4^{2}}}=10 \rightarrow \frac{\left|c-11\right|}{5}=10 \rightarrow \left|c-11\right|=50$$

*Poslední rovnice má dvě možná řešení:*

$c\_{1}-11=50 ⇒ c\_{1}=61$$c\_{2}-11=-50 ⇒ c\_{2}= -39$

*Existují tedy dvě tečny:*

$$t\_{1}:3x+4y+61=0 t\_{2}:3x+4y-39=0$$

**3) Určete průnik koule** $K: \left(x-2\right)^{2}+\left(y-3\right)^{2}+\left(z+1\right)^{2}\leq 21$ **se souřadnicovou osou *y.***

*Řešení:*

*Průnikem koule s osou y je úsečka AB, jejíž krajní body jsou průsečíky osy y a příslušné kulové plochy.*

*Body A, B leží na ose y ⇒*$A\left[0; y\_{1};0\right], B\left[0; y\_{2};0\right]$

*Body A, B leží na kulové ploše* $\left(x-2\right)^{2}+\left(y-3\right)^{2}+\left(z+1\right)^{2}=21$

$\left(y-3\right)^{2}=16$ *rovnici odmocníme*

$\left|y-3\right|=4$ *rovnice má dvě možná řešení*

$$y\_{1}-3=4 ⇒ y\_{1}=7 a y\_{2}-3=-4 ⇒ y\_{2}=-1$$

*Zapíšeme souřadnice bodů A, B a určíme parametrické vyjádření úsečky AB.*

$$A\left[0; 7;0\right], B\left[0; -1;0\right]$$

*AB:* $x=0$

$$ y=7-8t$$

$$ z=0, t \in \left〈0;1\right〉$$

**4) Napište rovnici kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadné a dotýká se přímek** $p: 2x-3y-8=0, q: 3x-2y-13=0.$

*Řešení:*

*Rovnici kružnice budeme hledat ve tvaru* $\left(x-m\right)^{2}+\left(y-n\right)^{2}=r^{2}$*, tedy musíme určit m, n, r. Sestavíme soustavu rovnic:*

$P\left[0;0\right] \in k ⇒ m^{2}+n^{2}=r^{2}$

$$\left|Sp\right|=r ⇒ \frac{\left|2m-3n-8\right|}{\sqrt{2^{2}+3^{2}}}=r$$

$$\left|Sq\right|=r ⇒ \frac{\left|3m-2n-13\right|}{\sqrt{2^{2}+3^{2}}}=r $$

*Porovnáním levých stran 2. a 3. rovnice soustavy získáme:*

$$\left|2m-3n-8\right|=\left|3m-2n-13\right|$$

*Při řešení nastanou dvě možnosti:*

$$2m-3n-8=3m-2n-13 nebo 2m-3n-8=-3m+2n+13$$

$$m=5-n nebo m=\frac{21+5n}{5}$$

*Dosadíme do 2. rovnice soustavy, upravíme a získáme:*

$$r=\frac{\left|2-5n\right|}{\sqrt{13}} nebo r=\frac{\left|2-5n\right|}{5\sqrt{13}}$$

*Vyjádření pro m a r dosadíme do 1. rovnice soustavy:*

$$25-10n+n^{2}+n^{2}=\frac{4-20n+25n^{2}}{13}$$

$$nebo \frac{441+210n+25n^{2}}{25}+n^{2}=\frac{4-20n+25n^{2}}{25∙13}$$

*Postupnými ekvivalentními úpravami dospějeme ke kvadratickým rovnicím:*

$$n^{2}-110n+321=0 nebo 625n^{2}+2750n+5729=0$$

*Druhá z uvedených kvadratických rovnic má záporný diskriminant, tedy nemá řešení.*

*První kvadratická rovnice má dva kořeny, ke každému z nich dopočítáme m a r sestavíme rovnici kružnice.*

*①* $n\_{1}=107; m\_{1}=-102; r\_{1}=41\sqrt{13} ⇒ k\_{1}: \left(x+102\right)^{2}+\left(y-107\right)^{2}=21853$

*②* $n\_{2}=3; m\_{2}=2; r\_{2}=\sqrt{13} ⇒ k\_{2}: \left(x-2\right)^{2}+\left(y-3\right)^{2}=13$

Příklady k procvičování:

1) Určete rovnici přímky, která na kružnici *k: x2 + y2 – 25 = 0* vytíná tětivu, jejímž středem je bod $P\left[2; -1\right].$

(správné řešení: *2x – y – 5 = 0*)

2) Najděte obecnou rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC: $A\left[1; -1\right], B\left[7;7\right], C\left[11; -1\right].$

(správné řešení: *x2 + y2 – 12x – 3y + 7 = 0*)

3) Rozhodněte o vzájemné poloze kružnice *k: x2 + y2 – 25 = 0* a přímky *p: 3x + 4y + 25 = 0*. Pokud existují společné body, určete jejich souřadnice.

(správné řešení: tečna kružnice v bodě $T\left[-3; -4\right]$)

4) Najděte velikost úhlu sevřeného poloměry kružnice $k: x^{2}+y^{2}-4x+6y-5=0$, které jsou vedeny body, v nichž souřadnicová osa *x* protíná kružnici *k*.

(správné řešení: 90°)

5) Napište rovnici tečny ke kružnici $k: x^{2}+y^{2}-6x-10y+29=0$ v dotykovém bodě $T\left[3;?\right]$.

(správné řešení: $y-5-\sqrt{5}=0 a y-5+\sqrt{5}=0$)

6) Najděte rovnici kružnice, která se dotýká obou souřadnicových os a prochází bodem $A\left[2; 4\right]$.

(správné řešení: $\left(x-2\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}=4 a \left(x-10\right)^{2}+\left(y-10\right)^{2}=100$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.