

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**NEKONEČNÉ GEOMETRICKÉ ŘADY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk**  **Datum vytvoření** | čeština  14. prosince 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a úlohy k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem nekonečné geometrické řady a umí jej aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Příklad 1**

Zdůvodněte konvergenci nekonečné geometrické řady a potom určete její součet:

*Řešení*

Daná geometrická řada je konvergentní, jestliže její kvocient *q* splňuje podmínku . V našem případě je , řada je konvergentní a její součet existuje. Protože první člen je a kvocient je , můžeme psát:

**Příklad 2**

Určete součet nekonečné geometrické řady

*Řešení*

Tuto úlohu můžeme vyřešit dvěma způsoby. Buď a) přímo nebo b) po uspořádání na rozdíl dvou nekonečných geometrických řad s kladnými členy.

1. Přímou metodou určíme první člen a kvocient geometrické řady a dále již snadno určíme
2. V tomto případě budeme mít dvě geometrické řady – tu, která je složená z lichých členů a tu, která je složená ze sudých členů zadané posloupnosti.

První posloupnost:

a

Druhá posloupnost:

a

Celkem je tedy

**Příklad 3**

V množině reálných čísel řešte rovnici

*Řešení*

Zadanou rovnici upravíme na tvar

Na levé straně se nachází nekonečná geometrická řada s kvocientem Aby byla konvergentní, musí být

Její součet potom je

Danou rovnici jsme tedy převedli na tvar

a dále

*Nalezený kořen vyhovuje podmínce*

**Příklad 4**

Racionální čísla vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla:

1. b)

*Řešení*

1. Jedná se o racionální číslo dané ryze periodickým desetinným rozvojem, které můžeme přepsat na tvar

To představuje konvergentní nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem a s kvocientem . Kvocient splňuje podmínku a pro součet této řady platí

1. V tomto případě se jedná o racionální číslo s neryze periodickým desetinným rozvojem, ale obdobně jako v předchozí úloze můžeme napsat

Počínaje druhým zlomkem se opět jedná o geometrickou řadu s prvním členem a s kvocientem , takže

a tedy

**Příklad 5**

Je daný čtverec o straně *a*. Do něho je vepsaný čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran daného čtverce. Takto vzniklému čtverci vepíšeme čtverec s vrcholy ve středech jeho stran atd. Postup stále opakujeme. Určete součet

1. obvodů,
2. obsahů

takto vzniklých čtverců.

*Řešení*

Strany čtverce tvoří geometrickou posloupnost, stejně tak geometrickou posloupnost tvoří součty obvodů čtverce a součty obsahů čtverce. Platí:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Strana | Obvod | Obsah |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| … | … | … |

1. Proto pro součet obvodů platí:

.

V závorce se jedná o součet nekonečné geometrické řady s prvním členem 4 a kvocientem . Takže

Součet obvodů takto vzniklých čtverců je .

1. Pro součet obsahů platí:

V závorce se opět jedná o součet nekonečné geometrické řady s prvním členem tentokrát 1 a kvocientem .

Takže

Součet obsahů takto vzniklých čtverců je

**Úlohy k procvičení**

1. Vypočítejte součet
2. Určete součet řady
3. Řešte v množině reálných čísel rovnici

.

1. Racionální čísla vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla:
3. Spirála se skládá z polokružnic, z nichž první má poloměr 10 cm a každá následující polokružnice má poloměr rovný dvěma třetinám poloměru předcházející polokružnice. Určete délku spirály.

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.