

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština7. duben 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem aritmetické posloupnosti a umí jej aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Aritmetické posloupnosti**

**Příklad 1**

Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí $a\_{2}+ a\_{4}=6$ a $a\_{2}^{2}+ a\_{4}^{2}=20$.

***Řešení***

 Pomocí diference $d$ a prvního členu $a\_{1}$ si vyjádříme členy $a\_{2}$ a $a\_{4}$ a dosadíme do zadaných vztahů. Tedy:

$$a\_{2}= a\_{1}+d, a\_{4}= a\_{1}+3d$$

 a

$$a\_{1}+d+ a\_{1}+3d=6$$

$$(a\_{1}+d)^{2}+ (a\_{1}+3d)^{2}=20$$

 Tím jsme si převedli úlohu na řešení soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými $a\_{1}$ a $d$.

$$2a\_{1}+4d=6$$

$$a\_{1}^{2}+2a\_{1}d+ d^{2}+ a\_{1}^{2}+6a\_{1}d+9d^{2}=20$$

 Po úpravách

$$a\_{1}+2d=3$$

$$a\_{1}^{2}+4a\_{1}d+ 5d^{2}=10$$

$$a\_{1}=3-2d$$

$$(3-2d)^{2}+4\left(3-2d\right)d+5d^{2}=10$$

$$9-12d+4d^{2}+12d-8d^{2}+5d^{2}=10$$

$$d^{2}-1=0$$

$$\left(d-1\right)\left(d+1\right)=0$$

 Odtud máme dvě řešení pro neznámou $d$ a to

$d\_{1}=1$**,** potom $a\_{1}=1$

nebo

$d\_{2}=-1$, potom $a\_{1}=5$

Úloze vyhovují dvě aritmetické posloupnosti.

**Příklad 2**

 V aritmetické posloupnosti (AP) je $a\_{1}=4, d=3$. Kolik členů této posloupnosti musíme sečíst, aby součet byl větší než 200?

***Řešení***

 Pro součet prvních $n$ členů AP platí $s\_{n}= \frac{n}{2} ·(a\_{1}+a\_{n})$. Vyjádříme $n$-tý člen posloupnosti jako $a\_{n}=a\_{1}+\left(n-1\right)d$ a provedeme součet prvních $n$ členů o němž víme, že musí být větší než 200. Tedy

$$\frac{n}{2} ·\left[a\_{1}+a\_{1}+\left(n-1\right)d\right]>200$$

Nyní dosadíme za $a\_{1}$ a $d$ a řešíme nerovnici pro neznámou $n$:

$$\frac{n}{2}·\left[4+4+(n-1)·3\right]>200$$

$$\frac{n}{2}·(8+3n-3)>200$$

$$n·(5+3n)>400$$

$$3n^{2}+5n-400>0$$

Vyřešíme kvadratickou nerovnici

$$n\_{1,2}=\frac{-5\pm \sqrt{5^{2}-4·3·(-400)}}{6}= \frac{-5\pm \sqrt{4825}}{6}\dot{=}\frac{-5\pm 69,46}{6}$$

a tedy $n<-12,41$ nebo $n>10,74$.

Protože se jedná o AP, záporné řešení nevyhovuje.

**Je potřeba sečíst alespoň 11 členů zadané AP.**

**Příklad 3**

Určete tři reálná čísla větší než 8 a menší než 648 tak, aby spolu s danými čísly tvořila pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti.

***Řešení***

 Ze zadání vyčteme, že $a\_{1}=8$ a $a\_{5}=648$. Musíme tedy určit diferenci $d$ a jestliže ji dosadíme do vyjádření pro $a\_{2}, a\_{3}$ a $a\_{4}$, najdeme hledaná čísla.

 Tedy

$$a\_{5}= a\_{1}+4d$$

$$648=8+4d$$

$$640=4d$$

$$d=160$$

 Po dosazení do vyjádření členů posloupnosti dostáváme

$$a\_{2}= a\_{1}+d=8+160=168$$

$$a\_{3}=a\_{1}+2d=a\_{2}+d=328 $$

$$a\_{4}= a\_{1}+3d=8+480=488$$

 **Hledaná čísla jsou 168, 328 a 488.**

**Příklad 4**

 Délky stran pravoúhlého trojúhelníku tvoří tři po sobě jdoucí členy AP. Obvod trojúhelníku je 96 cm. Určete délky stran.

***Řešení***

 V této úloze využijeme vztahy mezi členy AP jiným způsobem. Vyjádříme si členy $a\_{1}$ a $a\_{3}$ pomocí členu $a\_{2}$. Tedy

$a\_{1}=a\_{2}-d; a\_{3}=a\_{2}+d$.

 Podle zadání je

$3a\_{2}=96$ a $a\_{2}=32$.

 Nyní využijeme vlastností pravoúhlého trojúhelníku – zde platnosti Pythagorovy věty. Roli přepony zde bude „hrát“ člen $a\_{3}$, protože je největší.

$$a\_{3}^{2}= a\_{1}^{2}+ a\_{2}^{2}$$

$$(32+d)^{2}= (32-d)^{2}+ 32^{2}$$

$$1024+64d+d^{2}=1024-64d+d^{2}+1024$$

$$128d=1024 $$

$$d=8$$

$$a\_{1}=24, a\_{2}=32, a\_{3}=40.$$

 **Hledanými čísly jsou čísla 24, 32 a 40.**

**Úlohy k procvičení**

1. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, ve které platí:

$$a\_{1}+ a\_{2}=5$$

$$a\_{1}^{2}+ a\_{2}^{2}=13$$

$$\left[a\_{1}=3, d=-1 nebo a\_{1}=2, d=1\right]$$

1. Určete první člen aritmetické posloupnosti s diferencí $d=5$, aby platilo $s\_{20}\geq 1000$.

$$\left[a\_{1}\geq \frac{5}{2}\right]$$

1. Délky hran kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, součet délek všech hran kvádru je 72 cm. Vypočítejte povrch kvádru, je-li jeho objem 162 cm3.

$$\left[198 cm^{2}; délky hran jsou po řadě 3, 6 a 9 cm\right]$$

1. Tři čísla, která tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, mají součet 45 a součin 3240. Určete tato čísla.

$$\left[12, 15, 18\right]$$

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.