

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**SINOVÁ A KOSINOVÁ VĚTA**

**VZORCE PRO OBSAH TROJÚHELNÍKU**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština9. listopadu 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem sinová a kosinová věta, zná vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Sinová věta** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

$\frac{a}{\sin(α)}= \frac{b}{\sin(β) }= \frac{c}{\sin(γ)}=2r$*,*

*kde r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané.*

**Kosinová věta** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

$a^{2}= b^{2}+ c^{2}-2bc cos α$,

$b^{2}= a^{2}+ c^{2}-2bc cos β$,

$c^{2}= a^{2}+ b^{2}-2bc cos γ$.

**Obsah trojúhelníku** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

$S= \frac{1}{2} bc sin α= \frac{1}{2} ac sin β= \frac{1}{2} ab sin γ$.

**Příklad 1**

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 16,5; β = 48°10´; γ = 50°40´. Dále určete jeho obsah.

C

*Řešení*

γ

a

β

B

A

1. Nejprve pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku dopočítáme úhel α:

$$α=180°-\left(β+γ\right)=…=81°10´.$$

1. Nyní pomocí sinové věty určíme velikost strany *b*:

$$\frac{b}{\sin(β)}= \frac{a}{\sin(α)} \rightarrow b= \frac{a·\sin(β)}{\sin(α)}= \frac{16,5·\sin(48°10´)}{\sin(81°10´)}=12,4.$$

1. Dále sinovou větou určíme velikost strany *c*:

$$\frac{c}{\sin(γ)}= \frac{a}{\sin(α)} \rightarrow c= \frac{a·\sin(γ)}{\sin(α)}= \frac{16,5·\sin(50°40´)}{\sin(81°10´)}=12,9.$$

1. Nakonec určíme obsah trojúhelníku:

$$S= \frac{1}{2} ab\sin(γ= \frac{1}{2}·16,5·12,4·\sin(50°40´=79,1.)) $$

**Příklad 2**

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 7; b = 4; γ = 38°. Dále určete jeho obsah.

C

*Řešení*

γ

a

b

B

A

1. Kosinovou větou určíme velikost strany *c*:

$c^{2}= a^{2}+b^{2}-2·a·b·\cos(γ)$ a proto

$$c=\sqrt{a^{2}+b^{2}-2·a·b·\cos(γ) }=\sqrt{7^{2}+4^{2}-2·7·4·\cos(38°)} ≐4,6. $$

1. Pomocí sinové věty určíme úhel α:

$$\frac{a}{\sin(α)}= \frac{c}{\sin(γ)} \rightarrow \sin(α= \frac{a ·\sin(γ)}{c})= \frac{7·\sin(38°)}{4,6}≐0,9369 $$

$$α≐69°32´ ; α´≐110°28´$$

1. Přes součet vnitřních úhlů v trojúhelníku určíme β:

$$β=72°28´; β´=31°32´.$$

Zde je však nutná diskuze řešení a to vzhledem k nejednoznačnosti sinové věty. Nečárkované řešení nevyhovuje, protože není splněná podmínka, že proti větší straně leží větší úhel. Proto je v tomto případě řešení jen čárkované, tj. $α´≐110°28´$a $β´=31°32´$**.**

1. Nakonec určíme obsah trojúhelníku:

$$S= \frac{1}{2} ab\sin(γ= \frac{1}{2}·7·4·\sin(38°≐8,6.))$$

**Příklad 3**

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 15; b = 16; c= 17. Dále určete jeho obsah.

C

*Řešení*

a

b

c

B

A

1. Úhel α určíme pomocí kosinové věty:

$$a^{2}= b^{2}+c^{2}-2·b·c·\cos(α \rightarrow \cos(α= \frac{b^{2}+c^{2}-a^{2}}{2·b·c}))= \frac{16^{2}+17^{2}-15^{2}}{2·16·17} ≐0,5882$$

$$α≐53°58´$$

1. Úhel β můžeme určit dvěma způsoby a to
2. Kosinovou větou (složitější výpočet, ale dostaneme jednoznačné řešení), tj.

$$\cos(β=\frac{a^{2}+c^{2}-b^{2}}{2·a·c}= \frac{15^{2}+17^{2}-16^{2}}{2·15·17} ≐0,5059)$$

$$β≐59°37´$$

1. Sinovou větou (jednodušší výpočet, nedostáváme ale jednoznačné řešení – bude nutná diskuze), tj.

$$\frac{a}{\sin(α)}= \frac{b}{\sin(β)} \rightarrow \sin(β= \frac{b ·\sin(α)}{a})= \frac{16·\sin(53°58´)}{15}≐0,8626$$

$β≐59°37´; β´≐120°23´$.

 Čárkované řešení ale nevyhovuje, protože opět není splněná podmínka, že proti větší straně leží větší úhel.

1. Zbývá nám určit velikost úhlu γ a to pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku, tj.

$$γ=66°25´$$

1. Nakonec určíme obsah trojúhelníku

$$S= \frac{1}{2} ab\sin(γ= \frac{1}{2}·15·16·\sin(66°25´≐110.))$$

**Příklad 4**

Na těleso působí dvě síly o velikosti F1 = 75 N a F2 = 60 N. Vektory sil spolu svírají úhel $φ$ = 55°. Jak velká je výslednice sil F a jaké úhly svírá vektor síly **F**s vektory sil **F1** a **F2**?

*Řešení*

$$β$$

**F**

**F2**

$$ε$$

$$α$$

$$φ$$

**F1**

1. Nejdříve si určíme velikost úhlu ε, tj. ε = 180°- ϕ = … = 125°.
2. Užitím kosinové věty získáme velikost výslednice sil **F**, tedy

$F^{2}= F\_{1}^{2}+ F\_{2}^{2}-2F\_{1}F\_{2}\cos(ε)$ a dále

$$F= \sqrt{F\_{1}^{2}+ F\_{2}^{2}-2F\_{1}F\_{2}\cos(ε)}= \sqrt{75^{2}+60^{2}-2·75·60·\cos(125°)} N ≐120 N$$

1. Nyní určíme  úhel $α$ a to pomocí sinové věty (pozor na nejednoznačnost řešení – diskuze nutná)

$$\frac{F\_{2}}{\sin(α)}= \frac{F}{\sin(ε)} \rightarrow \sin(α= \frac{F\_{2}·\sin(ε)}{F}= \frac{60 ·\sin(125°)}{120} ≐0,4096)$$

$$α ≐24°11´$$

Druhé řešení $α´≐155°49´$ nevyhovuje podmínkám úlohy.

1. Nakonec určíme úhel β, $β= φ- α=55°-24°11´=30°49´.$

Výslednice sil má velikost 120 N a se silami **F1** a **F2** svírá úhly 24°11´a 30°49´.

**Příklad 5**

V jakém zorném úhlu se jeví pozorovateli předmět 78 metrů dlouhý, jestliže je od jednoho jeho konce vzdálený 56 metrů a od druhého konce 80 metrů?

78

*Řešení*

B

A

ϕ

80

56

P

Zorný úhel určíme pomocí kosinové věty:

$$\left|AB\right|^{2}= \left|PB\right|^{2}+ \left|PA\right|^{2}-2\left|PB\right|^{ }\left|PA\right|^{ }\cos(φ)$$

a odtud

$$\cos(φ= \frac{\left|PB\right|^{2}+ \left|PA\right|^{2}-\left|AB\right|^{2} }{2\left|PB\right|^{ }\left|PA\right|^{ }}= \frac{80^{2}+ 56^{2}-78^{2} }{2·56·80}) ≐0,3854$$

$$φ ≐67°20´$$

Pozorovatel vidí předmět v zorném úhlu 67°20´.

**Příklad 6**

Cíl C pozorujeme ze dvou dělostřeleckých pozorovatelen A, B, které jsou od sebe vzdálené 975 metrů, přičemž $\left|≺BAC\right|=63°, \left|≺ABC\right|=48°.$ Vypočítejte vzdálenost pozorovatelny B od cíle.

C

*Řešení*

48°63°

63°

975

B

A

1. Pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku vypočítáme úhel u vrcholu C, tedy

$$γ=180°-\left(α-β\right)=…=69°.$$

1. Sinovou větou určíme vzdálenost cíle C od pozorovatelny B

$$\frac{a}{\sin(α)}= \frac{c}{\sin(γ)} \rightarrow a= \frac{c·\sin(α)}{\sin(γ)}= \frac{975·\sin(63°)}{\sin(69°)}≐900 m.$$

Pozorovatelna B je od cíle vzdálená 900 metrů.

**Úlohy k procvičení**

1. Řešte trojúhelník ABC, jestliže znáte:
2. a = 2; b = 3; c = 4 $\left[α=28°57´, β=46°34´, γ=104°29´\right]$
3. b = 8; c = 5; $γ$ = 26°55´ $\left[\begin{array}{c}a\_{1}=10,6; β\_{1}=46°25´; α\_{1}=106°40´; \\a\_{2}=3,7; β\_{2}=133°35´; α\_{2}=19°30´;\end{array}\right]$
4. b = 5; α = 110°; β = 28° $\left[a=10;c=7,1; γ=42°\right]$
5. Na těleso působí dvě síly o velikostech F1 = 85 N, F2 = 48 N. Jejich vektory svírají úhel 57°. Jak velká je jejich výslednice a jaký úhel svírá její vektor s vektorem síly **F1**?

$$\left[F ≐118 N, ε ≐20°\right]$$

1. Vypočítejte šířku řeky, na jejímž jednom břehu jsme změřili vzdálenost bodů A, B, $\left|AB\right|$ = 50 m. Z koncových bodů úsečky AB je vidět bod C na druhém břehu řeky pod úhly α = 32°30´a β = 42°10´ vzhledem k úsečce AB.

C

β

α

B

A

$$\left[přibližně 18,7 m\right]$$

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.