

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**SINOVÁ A KOSINOVÁ VĚTA**

**VZORCE PRO OBSAH TROJÚHELNÍKU**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk**  **Datum vytvoření** | čeština  9. listopadu 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá pojem sinová a kosinová věta, zná vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníku a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Sinová věta** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

*,*

*kde r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané.*

**Kosinová věta** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

,

,

.

**Obsah trojúhelníku** *Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky a, b, c a vnitřní úhly velikost α, β, γ, platí*

.

**Příklad 1**

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 16,5; β = 48°10´; γ = 50°40´. Dále určete jeho obsah.

C

*Řešení*

γ

a

β

B

A

1. Nejprve pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku dopočítáme úhel α:
2. Nyní pomocí sinové věty určíme velikost strany *b*:
3. Dále sinovou větou určíme velikost strany *c*:
4. Nakonec určíme obsah trojúhelníku:

**Příklad 2**

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 7; b = 4; γ = 38°. Dále určete jeho obsah.

C

*Řešení*

γ

a

b

B

A

1. Kosinovou větou určíme velikost strany *c*:

a proto

1. Pomocí sinové věty určíme úhel α:
2. Přes součet vnitřních úhlů v trojúhelníku určíme β:

Zde je však nutná diskuze řešení a to vzhledem k nejednoznačnosti sinové věty. Nečárkované řešení nevyhovuje, protože není splněná podmínka, že proti větší straně leží větší úhel. Proto je v tomto případě řešení jen čárkované, tj. a **.**

1. Nakonec určíme obsah trojúhelníku:

**Příklad 3**

Řešte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 15; b = 16; c= 17. Dále určete jeho obsah.

C

*Řešení*

a

b

c

B

A

1. Úhel α určíme pomocí kosinové věty:
2. Úhel β můžeme určit dvěma způsoby a to
3. Kosinovou větou (složitější výpočet, ale dostaneme jednoznačné řešení), tj.
4. Sinovou větou (jednodušší výpočet, nedostáváme ale jednoznačné řešení – bude nutná diskuze), tj.

.

Čárkované řešení ale nevyhovuje, protože opět není splněná podmínka, že proti větší straně leží větší úhel.

1. Zbývá nám určit velikost úhlu γ a to pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku, tj.
2. Nakonec určíme obsah trojúhelníku

**Příklad 4**

Na těleso působí dvě síly o velikosti F1 = 75 N a F2 = 60 N. Vektory sil spolu svírají úhel = 55°. Jak velká je výslednice sil F a jaké úhly svírá vektor síly **F**s vektory sil **F1** a **F2**?

*Řešení*

**F**

**F2**

**F1**

1. Nejdříve si určíme velikost úhlu ε, tj. ε = 180°- ϕ = … = 125°.
2. Užitím kosinové věty získáme velikost výslednice sil **F**, tedy

a dále

1. Nyní určíme  úhel a to pomocí sinové věty (pozor na nejednoznačnost řešení – diskuze nutná)

Druhé řešení nevyhovuje podmínkám úlohy.

1. Nakonec určíme úhel β,

Výslednice sil má velikost 120 N a se silami **F1** a **F2** svírá úhly 24°11´a 30°49´.

**Příklad 5**

V jakém zorném úhlu se jeví pozorovateli předmět 78 metrů dlouhý, jestliže je od jednoho jeho konce vzdálený 56 metrů a od druhého konce 80 metrů?

78

*Řešení*

B

A

ϕ

80

56

P

Zorný úhel určíme pomocí kosinové věty:

a odtud

Pozorovatel vidí předmět v zorném úhlu 67°20´.

**Příklad 6**

Cíl C pozorujeme ze dvou dělostřeleckých pozorovatelen A, B, které jsou od sebe vzdálené 975 metrů, přičemž Vypočítejte vzdálenost pozorovatelny B od cíle.

C

*Řešení*

48°63°

63°

975

B

A

1. Pomocí součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku vypočítáme úhel u vrcholu C, tedy
2. Sinovou větou určíme vzdálenost cíle C od pozorovatelny B

Pozorovatelna B je od cíle vzdálená 900 metrů.

**Úlohy k procvičení**

1. Řešte trojúhelník ABC, jestliže znáte:
2. a = 2; b = 3; c = 4
3. b = 8; c = 5; = 26°55´
4. b = 5; α = 110°; β = 28°
5. Na těleso působí dvě síly o velikostech F1 = 85 N, F2 = 48 N. Jejich vektory svírají úhel 57°. Jak velká je jejich výslednice a jaký úhel svírá její vektor s vektorem síly **F1**?
6. Vypočítejte šířku řeky, na jejímž jednom břehu jsme změřili vzdálenost bodů A, B,  = 50 m. Z koncových bodů úsečky AB je vidět bod C na druhém břehu řeky pod úhly α = 32°30´a β = 42°10´ vzhledem k úsečce AB.

C

β

α

B

A

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-359-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.