

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**EXPONENCIÁLNÍ A LOGARITMICKÁ FUNKCE**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 1. 1. 2013 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák zná definice obou funkcí, chápe log. fci jako inverzní fci k exponenciální, načrtne grafy obou fcí, umí z nich vyčíst vlastnosti, zná definici logaritmu a pravidla pro počítání s logaritmy |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:**

*Řešení:*

*viz obrázek*

*Nejdříve do soustavy souřadné zakreslíme graf funkce f (černě) a pomocí něho odvodíme grafy ostatních funkcí. Funkce f je rostoucí exponenciální funkcí.*

*Funkční hodnoty funkce g jsou v celém definičním oboru opačné k funkčním hodnotám funkce f, proto je graf funkce g (fialově) souměrný s grafem funkce f podle osy x. Funkce g je klesající funkcí.*

*Předpis funkce h upravíme: . Pro každé je. Graf funkce h (červeně) je potom s grafem funkce f souměrný podle osy y.*

*K sestrojování grafu funkce p (zeleně) musíme posunout každý bod grafu funkce f o 3 ve směru kladné poloosy x. (posun po ose x doprava)*

*Chceme-li získat graf funkce q (oranžově), musíme každý bod grafu funkce f posunout o 3 ve směru záporné poloosy y (posun po ose y dolů); její předpis zmenšuje každou funkční hodnotu funkce f o 3.*

**2) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:**

*Řešení:*

*viz obrázek*

**

*Jako první do soustavy souřadné zakreslíme graf klesající exponenciální funkce f (žlutě).*

*Předpis funkce g nejdříve upravíme: . Dostáváme předpis pro rostoucí exponenciální funkci. Její graf (zeleně) je souměrný podle osy y s grafem funkce f.*

*Grafy funkcí f a g využijeme k sestrojení grafu funkce h (červeně). Stačí, když si uvědomíme, že pro každé x platí:*

*Obdobně budeme uvažovat při sestrojování grafu funkce p (modře).*

**3) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:**

*Řešení:*

*viz obrázek*

**

*Funkce f (červeně) je rostoucí logaritmická funkce, definovaná pro kladná reálná čísla x.*

*Funkce g je definována pro kladná a záporná reálná čísla. Její graf (žlutě) má dvě části. Jedna část (pro kladná reálná x) je totožná s grafem funkce f, druhá část (pro záporná reálná x) je souměrná podle osy y s grafem funkce f.*

*Definičním oborem funkce h jsou všechna reálná čísla různá od nuly. Při sestrojování grafu funkce h (zeleně) uplatníme definici absolutní hodnoty na funkční hodnoty funkce g:*

**4) Určete, pro které hodnoty parametru *a* je funkce klesající.**

*Řešení:*

*Aby funkce f byla klesající, musí platit: . Musíme tedy řešit dvě nerovnice v podílovém tvaru.*

*Nulové body z čitatele i jmenovatele zlomku nerovnice ① zakreslíme na číselnou osu a určíme interval, který je řešením nerovnice ①.*

**

*V nerovnici ② vynulujeme pravou stranu*

*Nerovnice ①, ② platí současně, proto určíme průnik množin K1 a K2, abychom získali konečné řešení.*

*Bude-li parametr a z množiny K, bude zadaná funkce f klesající.*

**5) Určete podmínku pro , jsou-li následující vztahy pravdivé:**

 **a) b)**

*Řešení:*

*a) Protože a hodnota mocniny s větším exponentem má být větší než hodnota mocniny s menším exponentem, jedná se o rostoucí exponenciální funkce. Exponenciální funkce je rostoucí právě tehdy, když .*

*b) Protože a hodnota logaritmu s větším argumentem má být menší než logaritmus menšího argumentu, jedná se o klesající logaritmickou funkci. Logaritmická funkce je klesající právě tehdy, když .*

**6) Určete definiční obor funkce:**

 **a) b)**

*Řešení:*

*a) Ve funkci f se vyskytuje zlomek, přirozený logaritmus a odmocnina. Toto vše musíme zohlednit při stanovování definičního oboru.*

*Ve jmenovateli zlomku nesmí být 0 ⇒*

*Musí být definován přirozený logaritmus ⇒*

 *Musí být definována odmocnina ⇒*

*Všechny tři vyznačené podmínky musí platit současně, stanovíme tedy jejich průnik a ten bude definičním oborem funkce f.*

*b) Obecně je exponenciální funkce definovaná pro všechna reálná čísla, ale v našem případě máme v exponentu odmocninu a ta je definovaná pro nezáporná čísla ⇒*

*Metodou nulových bodů nebo pomocí grafu kvadratické funkce určíme řešení nerovnice a tím i definiční obor funkce g.*

**

**7) Vypočtěte:**

 **a) b)**

*Řešení:*

*a) Uplatníme definici logaritmu a pravidla pro počítání s logaritmy:*

*b) Uplatníme pravidla pro počítání s mocninami a definici logaritmu:*

**8) Je dána funkce .**

 **a) Určete definiční obor funkce f.**

 **b) K funkci f určete inverzní funkci.**

*Řešení:*

*a) Rovnice funkce f má smysl, pokud je definována odmocnina a zároveň logaritmus. Pro stanovení definičního oboru platí současně dvě podmínky:*

 *①*

 *②*

*Vyřešíme nejdříve první nerovnici:*

*U poslední nerovnosti jsou na obou stranách mocniny s různými základy, proto dál pokračujeme logaritmováním dané nerovnosti:*

*Vyřešíme druhou nerovnost:*

*Obě žlutě označené podmínky platí současně, proto jejich průnikem získáme definiční obor funkce f.*

*b) Určíme rovnici inverzní funkce. Z rovnice funkce f vyjádříme nezávisle proměnnou x.*

*Dle definice logaritmu platí:*

*Poslední rovnost zlogaritmujeme, upravujeme pomocí definice logaritmu a pravidel pro počítání s logaritmy:*

*Nyní provedeme záměnu a zapíšeme rovnici inverzní funkce:*

Příklady k procvičování:

1) Do téže soustavy souřadné načrtněte grafy funkcí:

 a)

b)

správné řešení:

a)

 

b)



2) Rozhodněte o pravdivosti výroků:

 a) b)

 c) d)

 e) f)

(správné řešení: pravdivé výroky a, e)

3) Určete, pro které hodnoty parametru *a* je funkce rostoucí.

(správné řešení: )

4) Určete definiční obor funkce:

 a) b)

 c) d)

(správné řešení: a) ; b) ; c) ; d) )

5) Vypočítejte hodnotu výrazu:

 a) b)

(správné řešení: a) -1; b) -4)

6) Daná čísla porovnejte s číslem 1:

(správné řešení: menší než 1: 2., 5., 6.; rovna 1: 4.; větší než 1: 1., 3., 7., 8., 9.)

7) Vypočítejte *x*, jestliže platí:

 a) b)

 c) d)

(správné řešení: a) b) ; c) -3; d) 196)

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.