

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**FUNKCE NEPŘÍMÁ ÚMĚRNOST A LINEÁRNÍ LOMENÁ FUNKCE**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | Čeština10. dubna 2014 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá funkci nepřímá úměrnost a lineární lomená funkce a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Příklad 1**

 3 dělníci vykonali určitou práci za 10 dní. Za kolik dní by ji vykonalo 5 dělníků? (Předpokládáme, že všichni dělníci pracovali se stejným výkonem.)

*Řešení*

 $x$ dělníků vykoná práci za $y$ dní. Kolikrát je více dělníků, tolikrát kratší je doba, za kterou vykonají určitou práci. Počet dní $y$ je tedy nepřímo úměrný počtu dělníků $x$. Tzn. $y=\frac{k}{x}$, kde $k>0$. Konstantu úměrnosti $k$ určíme, jestliže do této rovnice dosadíme $y=10$ pro $x=3$; dostáváme $k=10·3=30$. Rovnice příslušné nepřímé úměrnosti je $y=\frac{30}{x}$ a pro $x=5$ je $y=\frac{30}{5}=6.$

 5 dělníků vykoná zadanou práci za 6 dní.

**Příklad 2**

Načrtněte graf funkce $f:y=-\frac{3}{x}+2$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

*Řešení*

 Je-li funkce zadaná předpisem

$y=-\frac{3}{x}+2$,

pak dojde k posunu osy $x$ o +2 směrem vzhůru do osy $x´$, osa $y$ se nemění. Zároveň je potřeba stanovit definiční obor funkce, tedy $x\ne 0.$



Graf 1

Průsečíky s osami:

1. $P\_{x}:y=0$ a proto

$$-\frac{3}{x}+2=0$$

$$\frac{-3+2x}{x}=0$$

$$x=\frac{3}{2} \rightarrow P\_{x}\left[\frac{3}{2};0\right]$$

1. $P\_{y}:x=0$ ale to není vzhledem k definičnímu oboru možné. Proto $P\_{y}$ **neexistuje.**

**Příklad 3**

Načrtněte graf funkce $g:y=2+\frac{3}{x-1}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

*Řešení*

 Definiční obor funkce je $x\ne 1.$ V tomto případě dojde k posunu obou souřadnicových os. Osa $x$ se posune o +2 směrem vzhůru, osa $y$ o +1 směrem doprava.



Graf 2

Průsečíky s osami:

1. $P\_{x}:y=0$ a proto

$$2+\frac{3}{x-1}=0$$

$$\frac{2x-2+3}{x-1}=0$$

$$\frac{2x+1}{x-1}=0$$

$$x=-\frac{1}{2} \rightarrow P\_{x}\left[-\frac{1}{2};0\right]$$

1. $P\_{y}:x=0$ a proto

$$y=2+\frac{3}{-1}=2-3=-1 \rightarrow P\_{y}\left[0; -1\right]$$

**Příklad 4**

Načrtněte graf funkce h$:y=\frac{3x+2}{x+1}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

*Řešení*

 Definiční obor funkce je $x\ne 2.$

Nejprve provedeme dělení mnohočlenu mnohočlenem a upravíme předpis funkce na tvar vhodný pro načrtnutí grafu.

Tedy

$$\left(3x+2\right):\left(x+1\right)=3-\frac{1}{x+1}.$$

V tomto případě dojde k posunu obou souřadnicových os. Osa $x$ se posune o +3 směrem vzhůru, osa $y$ o –1 směrem doprava.



Graf 3

Průsečíky s osami:

1. $P\_{x}:y=0$ a proto

$$\frac{3x+2}{x+1}=0$$

$$x=-\frac{2}{3} \rightarrow P\_{x}\left[-\frac{2}{3};0\right]$$

1. $P\_{y}:x=0$ a proto

$$y=\frac{2}{1}=2 \rightarrow P\_{y}\left[0; 2\right]$$

**Příklad 5**

Načrtněte graf funkce i$:y=\left|\frac{2x+3}{x-2}\right|$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.

*Řešení*

 Definiční obor funkce je $x\ne 2.$ U tohoto typu úlohy nejprve „zapomeneme“ na absolutní hodnotu a budeme pracovat s funkcí j:$y=\frac{2x+3}{x-2}.$ Podobně jako v příkladu 4 načrtneme graf funkce j a potom „se vrátíme“ k funkci i.

 Tedy j:$y=\frac{2x+3}{x-2}.$ Provedeme dělení mnohočlenu mnohočlenem a dostaneme

$$\left(2x+3\right):\left(x-2\right)=2+\frac{7}{x-2}.$$

Vidíme, že osa *x* se posune o +2 směrem nahoru a osa *y* se posune o +2 směrem doprava.



Graf 4

Průsečíky s osami:

1. $P\_{x}:y=0$ a proto

$$\frac{2x+3}{x-2}=0$$

$$x=-\frac{3}{2} \rightarrow P\_{x}\left[-\frac{3}{2};0\right]$$

1. $P\_{y}:x=0$ a proto

$$y=-\frac{3}{2} \rightarrow P\_{y}\left[0; -\frac{3}{2}\right]$$

Nyní se „vrátíme“ k funkci *i* a tím i k absolutní hodnotě. Proto:



Graf 5

**Příklad 6**

 Určete předpis pro lineární lomenou funkci, jejímž grafem je hyperbola se středem v bodě $S\left[-1;2\right]$ procházející bodem $A\left[-2; -1\right].$

*Řešení*

 V této chvíli budeme hledat předpis lineární lomené funkce ve tvaru

$$y-n=\frac{k}{x-m},$$

Kde *m, n* jsou souřadnice středu *S* hyperboly. Tedy

$$y-2=\frac{k}{x+1}.$$

Zbývá určit hodnotu koeficientu *k*. Tu zjistíme dosazením souřadnic bodu *A* za *x* a *y* v daném předpisu. Tj.

$$-1-2=\frac{k}{x+1}$$

$$-3=\frac{k}{-1} \rightarrow k=3.$$

Takže hledaná funkce má předpis f:$y-2=\frac{3}{x+1}$ a po úpravě

$$y=2+\frac{3}{x+1}$$

nebo

$$y=\frac{2x+5}{x+1}.$$

Jen pro zajímavost její graf je



Graf 6

Průsečíky s osami:

1. $P\_{x}:y=0$ a proto

$$x=-\frac{5}{2} \rightarrow P\_{x}\left[-\frac{5}{2};0\right]$$

1. $P\_{y}:x=0$ a proto

$$y=5 \rightarrow P\_{y}\left[0; 5\right].$$

**Úlohy k procvičení**

1. 5 dělníků vyrobí 180 výrobků za 3 hodiny. Za kolik hodin vyrobí čtyři dělníci 240 stejných výrobků?

$$\left[5 hodin\right]$$

1. Načrtněte graf funkce $f:y=\frac{2}{x}-3$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.


Graf 7

1. Načrtněte graf funkce $g:y=-2+\frac{1}{x-3}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.



Graf 8

1. Načrtněte graf funkce h$:y=\frac{2x-1}{x-2}$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.



Graf 9

1. Načrtněte graf funkce i$:y=\left|\frac{x-1}{x-2}\right|$ a určete průsečíky se souřadnicovými osami.



Graf 10

1. Určete předpis pro lineární lomenou funkci, jejímž grafem je hyperbola se středem v bodě $S\left[2;-3\right]$ procházející bodem $A\left[3; 1\right].$

$$\left[f:y=-3+\frac{4}{x-2}=\frac{-3x+10}{x-2}\right]$$



Graf 11

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-357-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.