

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**OPERACE S KOMBINAČNÍMI ČÍSLY A S FAKTORIÁLY, KOMBINACE**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština2. 12. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá operace s kombinačními čísly a s faktoriály a kombinace a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Operace s kombinačními čísly a s faktoriály, kombinace**

**Příklad 1**

Které z čísel $A=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{400}{40}\right)$, $B=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{401}{41}\right)$ je větší?

*Řešení:*

 Čísla A, B vyjádříme pomocí definice kombinačního čísla a dále budeme řešit nerovnici mezi kombinačními čísly. Tedy

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{400}{40}\right)= \frac{400!}{40!·360!}$$

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{401}{41}\right)= \frac{401!}{41!·360!}$$

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{400}{40}\right)⌂\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{401}{41}\right)$$

*Symbol ⌂ zde nyní nahrazuje neznámé znaménko rovnosti či nerovnosti*

$$\frac{400!}{40!·360!}⌂\frac{401!}{41!·360!}$$

Čísla 360! ve jmenovateli můžeme krátit a ostatní faktoriály rozepsat a dostaneme

$$\frac{400!}{40!}⌂\frac{401·400!}{41·40!}$$

a dále

$$1⌂\frac{401}{41}$$

Zlomek $\frac{401}{41}$ je číslo větší než 1 a proto platí

$$1<\frac{401}{41}$$

a celkově (podle porovnávání zlomků) je

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{400}{40}\right)<\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{401}{41}\right)$$

a tedy $A<B$.

**Příklad 2**

Víte-li, že $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{5}\right)=1287$, určete a) $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{8}\right)$ b) $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{6}\right)$ .

*Řešení:*

1. Podle definice kombinačního čísla platí $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)=\frac{n!}{\left(n-k\right)!·k!}= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{n-k}\right)$. Proto také platí

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{5}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{8}\right)=1 287$$

1. Pro výpočet využijeme následující úpravu

$$\frac{\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k+1}\right)}{\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)}=\frac{\frac{n!}{\left(n-k-1\right)!·\left(k+1\right)!}}{\frac{n!}{\left(n-k\right)!·k!}}= \frac{(n-k)·\left(n-k-1\right)!·k!}{\left(n-k-1\right)!·(k+1)·k!}=\frac{n-k}{k+1}$$

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k+1}\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)·\frac{n-k}{k+1}$$

Konkrétně pro náš případ je $n=13, k=5$ a $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{6}\right)=\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{13}{5}\right)·\frac{8}{6}=1 716$

**Příklad 3**

 V množině $N$řešte rovnici $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{x}\right)+ \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{x+1}\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{4}\right)$.

*Řešení:*

 Pro vyřešení této úlohy si stačí uvědomit, že $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}\right)+\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k+1}\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{n+1}{k+1}\right)$. Proto platí

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{x}\right)+ \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{x+1}\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{x+1}\right)$$

dále

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{x+1}\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{4}\right)$$

a také

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{3}\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{7}{4}\right)$$

Proto $x=2$ nebo $x=3$**.**

**Příklad 4**

 Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:

1. $2\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x+6}{x+4}\right)-\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x+4}{x+2}\right)=4!+ \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{2}\right)x$
2. $\left[\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{2}\right)\right]^{2}-5\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{2}\right)-6=0$.

*Řešení:*

1. Nejprve stanovíme definiční obor rovnice $x\geq -2$. Rovnici upravíme podle pravidel pro počítání s kombinačními čísly a faktoriály na tvar

$$2\frac{\left(x+6\right)!}{\left(x+4\right)!·2!}- \frac{\left(x+4\right)!}{\left(x+2\right)!·2!}=4!+ \frac{5!}{3!·2!}·x$$

$$\left(x+6\right)·\left(x+5\right)- \frac{1}{2}·\left(x+4\right)·\left(x+3\right)=24+10x$$

$$2x^{2}+22x+60-x^{2}-7x-12-48-20x=0$$

$$x^{2}-5x=0$$

Proto $x\_{1}=0; x\_{2}=5$**.** Oba kořeny vyhovují zadání úlohy a definičnímu oboru rovnice.

1. U tohoto typu rovnice nejprve využijeme substituci a to

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{2}\right)=t$$

Potom dostáváme rovnici

$$t^{2}-5t-6=0$$

$$\left(t-6\right)·\left(t+1\right)=0$$

Po dosazení do substituce máme

ba) $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{2}\right)=6$

 $\frac{x!}{\left(x-2\right)!·2}=6$ $x·\left(x-1\right)=12$

 $\left(x-4\right)·\left(x+3\right)=0$

$x\_{1}=4$ … vyhovuje řešení úlohy

$x\_{2}= -3$ … nevyhovuje řešení úlohy

bb) $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{2}\right)= -1$ … to je ale v rozporu s definicí kombinačního čísla a proto nemá smysl pokračovat dále.

Závěr: řešením dané rovnice je pouze číslo 4.

**Příklad 5**

 Test přijímacích zkoušek se skládá z 10 otázek z biologie, 15 otázek z chemie a z 8 otázek z fyziky. V každém předmětu se vybírá ze souboru 120 otázek. Kolik je možností sestavit test?

*Řešení:*

Na pořadí otázek při výběru nezáleží a již vybraná a zařazená otázka se nemůže opakovat. Jedná se proto o kombinace bez opakování.

 Počet možností výběru otázek pro jednotlivé předměty je:

* biologie

$$K\left(20, 200\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{120}{10}\right)= \frac{120!}{110!·10!}=1,16·10^{14}$$

* chemie

$$K\left(15, 120\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{120}{15}\right)= \frac{120!}{105!·15!}=4,73·10^{18}$$

* fyzika

$$K\left(8, 120\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{120}{8}\right)= \frac{120!}{112!·8!}=8,40·10^{11} $$

 Celkem je tedy podle pravidla kombinatorického součinu

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{120}{10}\right)·\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{120}{15}\right)·\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{120}{8}\right)=4,61·10^{44} $$

možností sestavení přijímacího testu.

**Příklad 6**

 V cukrárně mají 10 druhů zákusků v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit 25 zákusků?

*Řešení:*

Vybíráme 25 zákusků z deseti nabízených druhů, od každého druhu zákusku je v cukrárně k dispozici nejméně 25 kusů (dostatečné množství), na pořadí vybíraných zákusků přitom nezáleží. Počet všech možností pro výběr zákusků je

$$K´\left(25, 10\right)=K\left(25, 34\right)= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{34}{25}\right)= \frac{34!}{25!·9!}=52 451 256$$

**Úlohy k procvičení**

1. Kolikrát je číslo $L= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{100}{90}\right)$ větší než číslo $M= \left(\genfrac{}{}{0pt}{}{99}{9}\right)$?

$$\left[desetkrát\right]$$

1. Víte-li, že $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{14}{5}\right)=2002$, určete $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{14}{4}\right)$

$$\left[1001\right]$$

1. Jedním kombinačním číslem vyjádřete

$$\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{1}\right)+\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{10}{0}\right)+\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{11}{9}\right)$$

$$\left[\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{2}\right)\right]$$

1. V množině $N$řešte rovnici $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{6}{x}\right)=15$

$$\left[2;4\right]$$

1. Řešte rovnice s neznámou $x\in R$:
2. $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x-1}{x-3}\right)-2·\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x-2}{x-4}\right)=0$ $\left[5\right]$
3. $\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{1}\right)+\left(\genfrac{}{}{0pt}{}{x-3}{x-4}\right)=2x-3$ $\left[x\geq 4;x\in N\right]$
4. Kolika způsoby lze 4 chlapce a 8 dívek rozdělit na dvě šestičlenná volejbalová družstva tak, aby v každém družstvu byla čtyři děvčata a 2 chlapci?

$$\left[420\right]$$

1. V prodejně uzenin mají 8 druhů klobás v dostatečném množství. Kolika způsoby můžeme vybrat dvanáct nožek klobás?

$$\left[50 388\right]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CALDA, Emil a DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-365-3.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.