

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**VARIACE A PERMUTACE**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá variace a permutace a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Variace a permutace**

**Skupiny bez opakování**

**Příklad 1**

Kolik různých přirozených trojciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5? Kolik z nich je dělitelných dvěma? Kolik z nich je lichých?

*Řešení:*

 Na pořadí cifer v čísle záleží, nevybíráme všechny cifry a cifry se v čísle nemohou opakovat – jedná se o variace bez opakování.

1. $V\left(3, 5\right)= \frac{5!}{\left(5-3\right)!}=60$
2. Dvěma jsou dělitelná ta, která na místě jednotek mají cifry 2 nebo 4. Proto tyto cifry „zafixujeme“ na místě jednotek a na další dvě místa vybíráme dvě cifry ze čtyř.

Tedy $2·V\left(2, 4\right)=2·\frac{4!}{\left(4-2\right)!}=24$

1. Lichá jsou ta čísla, u kterých se na místě jednotek objevuje cifra 1, 3 nebo 5 – „zafixujeme“ je a na další dvě místa vybíráme dvě cifry ze čtyř.

Takže $3·V\left(2, 4\right)=3·\frac{4!}{\left(4-2\right)!}=36$

**Příklad 2**

 Zmenší-li se počet prvků o 27, zmenší se počet variací druhé třídy bez opakování vytvořených z těchto prvků desetkrát. Určete původní počet prvků.

*Řešení:*

Text úlohy přepíšeme do rovnice

$$V\left(2, n-27\right)=\frac{1}{10}·V(2,n)$$

$$\frac{\left(n-27\right)!}{\left(n-29\right)!}=\frac{n!}{10·\left(n-2\right)!}$$

 Definiční obor této rovnice je $n\geq 29;n\in N$**.**

$$\frac{(n-27)·(n-28)·\left(n-29\right)!}{\left(n-29\right)!}=\frac{n·(n-1)·\left(n-2\right)!}{10·\left(n-2\right)!}$$

$$10·\left(n^{2}-55n+756\right)=n^{2}-n$$

$$9n^{2}-549n+7560=0$$

$$n^{2}-61n+840=0$$

$$\left(n-40\right)·\left(n-21\right)=0$$

 Řešením rovnice jsou tedy čísla 40 a 21. 21 však nevyhovuje zadání úlohy, resp. definičnímu oboru rovnice a tak řešením úlohy je pouze číslo 40.

**Příklad 3**

 Na sportovním kurzu vybíráme do závodu čtyřčlenné hlídky, v nichž má každý závodník svoji funkci – velitel, zdravotník, pokladník a kurýr. Kolika způsoby lze z 15 chlapců a 18 dívek sestavit takové hlídky, jestliže:

1. pro volbu hlídky neplatí žádná omezující pravidla
2. velitel hlídky musí být dívka
3. kurýr musí být chlapec
4. v hlídce mohou být nejvýše dvě dívky.

*Řešení:*

1. Pokud pro sestavení hlídky neplatí žádná omezující pravidla, pak vytváříme čtveřice, v nichž záleží na pořadí členů (každý plní jinou funkci), z 33 účastníků kurzu. Proto

$V\left(4, 33\right)=33·32·31·30=982 080$nebo

$$V\left(4, 33\right)= \frac{33!}{\left(33-4\right)!}=\frac{33!}{29!}=982 080$$

1. Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že velitel hlídky je dívka. Takovou hlídku lze sestavit $18·V\left(3, 32\right)=18·32·31·30=535 680 $způsoby.
2. Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že kurýr musí být chlapec. Takovou hlídku lze sestavit $15·V\left(3, 32\right)=15·32·31·30=464 400$způsoby.
3. Při výběru hlídky musíme respektovat podmínku, že v hlídce mohou být nejvýše dvě dívky. To znamená buď žádná, jedna nebo dvě.
* žádná dívka $V\left(4, 15\right)=15·14·13·12=32 760$způsobů
* jedna dívka $4·18·V\left(3, 15\right)=4·18·15·14·13=196 560$způsobů
* dvě dívky $6·V\left(2, 18\right)·V\left(2, 15\right)=6·18·17·15·14=385 560 $ způsobů

Protože je splněné kombinatorické pravidlo součtu (každé dvě množiny hlídek jsou navzájem disjunktní), je výsledný počet možností pro sestavení hlídky $614 880$ způsobů.

**Příklad 4**

 Kolik různých osmiciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 8?

*Řešení:*

 Na pořadí cifer v čísle záleží, vybíráme všechny cifry a žádná se nemůže opakovat. Proto pro počet čísel platí: $P\left(8\right)=8!=40 320$**.**

**Příklad 5**

Kolika způsoby lze rozmíchat hru 32 karet?

*Řešení:*

 Opět záleží na pořadí karet při míchání, vybíráme všechny karty a žádná karta se neopakuje. Proto pro počet míchání platí:

$P\left(32\right)=32!=2,631·10^{35}$**.**

**Příklad 6**

 Kolika způsoby můžeme usadit dva chlapce a tři dívky na jednu lavičku,

1. jestliže pro jejich usazení neplatí žádné podmínky,
2. jestliže sedí vedle sebe oba chlapci a vedle nich všechny dívky?

*Řešení:*

1. Pokud pro usazení neplatí žádné omezující podmínky, pak je můžeme usadit $P\left(5\right)=5!=120$způsoby.
2. Dva chlapce vedle sebe můžeme usadit dvěma způsoby, tři dívky vedle nich posadíme $P\left(3\right)=3!=6$ způsoby, dohromady tedy $2·6=12$ způsoby. Chlapci ale mohou sedět vpravo nebo vlevo od dívek a proto je počet pro usazení $12·2=24$ možností.

**Úlohy k procvičení**

1. Určete počet všech přirozených čísel větších než 300 a menších než 5000, v jejichž zápisech se vyskytují cifry 2, 3, 4 , 6, 9, a to každá nejvýše jednou.

$\left[120\right]$

1. Z kolika prvků lze sestavit 992 variací druhé třídy bez opakování?

$$\left[32\right]$$

1. Na sportovním kurzu vybíráme do závodu tříčlenná družstva, v nichž má každý závodník svoji funkci – velitel, zdravotník a kurýr. Kolika způsoby lze z 10 chlapců a 13 dívek sestavit takové družstvo, jestliže:
2. pro volbu družstva neplatí žádná omezující pravidla $\left[10 626\right]$
3. velitel družstva musí být chlapec $\left[4 620\right]$
4. zdravotník musí být dívka $\left[6 006\right]$
5. v družstvu mohou být nejvýše dva chlapci. $\left[9 906\right]$
6. Kolika způsoby lze postavit 20 žáků do řady při nástupu na tělocvik? $\left[20!\right]$
7. Kolika způsoby lze postavit do řady na poličku 5 různých českých knih a 3 různé francouzské knihy tak, že všechny české budou vedle sebe a všechny francouzské budou vedle sebe?

$$\left[2·5!·3!=1 440\right]$$

**Skupiny s opakováním**

**Příklad 1**

Určete, kolik různých sedmiciferných přirozených čísel lze sestavit z číslic 0,1,2,3,

1. má-li se v každém z nich opakovat číslice 0 třikrát, číslice 1 jednou, číslice 2 dvakrát a číslice 3 jednou
2. má-li se v každém z nich opakovat číslice 1 čtyřikrát, číslice 2 jedenkrát a na místě jednotek a desítek budou nuly.
3. Kolik číslic můžeme získat, zaměníme-li pořadí číslic v čísle 122 338?

*Řešení:*

1. Jedná se o permutace s opakováním. Vytváříme uspořádané sedmice (k= 7), ve kterých je k1= 3, k2= 1, k3= 2 a k4= 1. Hledaný počet čísel určíme

***P´***(3, 1, 2, 1) = $\frac{\left(3+1+2+1\right)!}{3!·1!·2!·1!}=\frac{7!}{3!·2!}=420$

1. Opět se jedná o permutace s opakováním, vytváříme uspořádané sedmice. Nyní si však na místě jednotek a desítek „zafixujeme“ číslice 0 a budeme hledat uspořádané pětice, ve kterých se vyskytuje číslice 1 čtyřikrát a číslice 2 jedenkrát. Proto

***P´***(4, 1) = $\frac{\left(4+1\right)!}{4!·1!}=\frac{5!}{4!}=5$

1. Opět se jedná o permutace s opakováním, nyní vytváříme uspořádané šestice (k=6), ve kterých je k1=1, k2=2, k3=2 a k4=1. Hledaný počet čísel určíme

***P´***(1, 2, 2, 1) =$\frac{\left(1+2+2+1\right)!}{1!·2!·2!·1!}=\frac{6!}{2·2}=180$

**Příklad 2**

Kolik různých telefonních stanic lze napojit na tel. ústřednu, jestliže jsou všechna čísla stanic šesticiferná a na 1. místě může být i 0? Jak se změní výsledek, jestliže se na 1. místě 0 nepřipouští? Jak se změní výsledek, budou-li telefonní čísla sedmimístná a na 1. místě 0 nepřipouštíme?

*Řešení:*

1. V tomto případě se jedná o variace s opakováním. Vytváříme uspořádané šestice z 10 prvků (k dispozici máme 10 číslic) a číslice se mohou v čísle opakovat. Protože připouštíme na 1. místě číslici 0, je hledaný počet

***V´***(6, 10) = 106 = **1 000 000** (připouštíme tím také telefonní číslo 000 000)

1. Nyní se také jedná o variace s opakováním, ale na 1. místě můžeme „vystřídat“ jen 9 číslic – číslici 0 zde nepřipouštíme. Dále vytváříme uspořádané pětice. Proto

9·***V´***(5, 10)= 9·105 = **900 000**

1. Jde o podobnou úlohu, jako byl případ b), jen s tím rozdílem, že telefonní čísla jsou sedmimístná. Proto

9·***V´***(6, 10)= 9·106 = **9 000 000**

**Úlohy k procvičení**

1. Určete, kolik různých slov (bez ohledu na jejich význam), lze sestavit z písmen slova ABRAKADABRA, jestliže
2. jsou použita všechna
3. písmeno K bude na konci slova
4. všechna A nesmí být vedle sebe.

$$\left[a) 83 160;b) 7 560;c)81 900\right]$$

1. Určete, kolik je všech možných SPZ aut, které se skládají ze tří písmen abecedy A – Z, za nimiž následují čtyři číslice 0 – 9? Jak se změní počet SPZ, zvýší-li se počet písmen na 4 a počet číslic klesne na 3? Kolik SPZ můžeme sestavit jen z 6 číslic a žádných písmen? (počítejte s tím, že písmen abecedy je 22).

$$\left[a) 106 480 000;b) 234 256 000;c) 1 000 000 \right]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CALDA, Emil a DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-365-3.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.