

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**PYTHAGOROVA VĚTA, EUKLIDOVY VĚTY**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Jana Homolová |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 7. 10. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá Pythagorovu větu a Euklidovy věty a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

Řešené příklady:

**1) Rozhodněte, zda trojúhelník, jehož strany mají délky** $2;k-k^{-1};k+ k^{-1}$**, kde** $k \in \left(1; \infty \right)$**, je pravoúhlý.**

*Řešení:*

*Je-li trojúhelník pravoúhlý, platí pro jeho strany Pythagorova věta*$c^{2}= a^{2}+ b^{2}$*.*

*Označíme strany trojúhelníka:* $c=k+ k^{-1};a=2;b=k- k^{-1}$ *, určíme*

$c^{2} , a^{2}+ b^{2} a porovnáme$*.*

$$c^{2}= \left(k+ k^{-1}\right)^{2}= \left(k+\frac{1}{k}\right)^{2}= \left(\frac{k^{2}+ 1}{k}\right)^{2}= \frac{k^{4}+ 2k^{2}+ 1}{k^{2}}$$

$$a^{2}+ b^{2}= 2^{2}+ \left(k- k^{-1}\right)^{2}=4+ \left(k- \frac{1}{k}\right)^{2}=4+ \left(\frac{k^{2}- 1}{k}\right)^{2}=4+ \frac{k^{4}- 2k^{2}+ 1}{k^{2}}== \frac{4k^{2}+ k^{4}- 2k^{2}+ 1}{k^{2}}= \frac{k^{4}+ 2k^{2}+ 1}{k^{2}}$$

*Rovnost platí, trojúhelník je pravoúhlý.*

**2) Sestrojte úsečku o velikosti** $h= \sqrt{21}$ **užitím**

**a) Pytharorovy věty,**

**b) Euklidovy věty o odvěsně,**

**c) Euklidovy věty o výšce.**

*Řešení:*

*a) Číslo 21 vyjádříme jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel a porovnáme s Pythagorovou větou.*

$$\sqrt{21}= \sqrt{5^{2}-2^{2}}$$

$$a= \sqrt{c^{2}-b^{2}}$$

*Úsečka o velikosti* $h= \sqrt{21}$ *bude odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má velikost c = 5 a druhá odvěsna b = 2.*

**

*b) Číslo 21 vyjádříme jako součin dvou přirozených čísel a porovnáme s Euklidovou větou o odvěsně.*

$$\sqrt{21}= \sqrt{7 ∙3}$$

$$a= \sqrt{c ∙ c\_{a}}$$

*Úsečka o velikosti* $h= \sqrt{21}$ *bude odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má velikost c = 7 a na ní příslušný úsek ca = 3. Trojúhelník sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice s průměrem 7.*

**

*c) Číslo 21 vyjádříme jako součin dvou přirozených čísel a porovnáme s Euklidovou větou o výšce.*

$$\sqrt{21}= \sqrt{7 ∙3}$$

$$a= \sqrt{c\_{a} ∙ c\_{b}}$$

*Úsečka o velikosti* $h= \sqrt{21}$ *bude výškou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má velikost c = 10 a na ní příslušný úsek ca = 7 a úsek cb = 3. Trojúhelník sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice s průměrem 10.*

**

**3) Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku s přeponou c, odvěsnami a, b a výškou *v* k přeponě, platí:** $\frac{1}{a^{2}}+ \frac{1}{b^{2}}= \frac{1}{v^{2}}$**.**

*Řešení:*

*Dokazujeme pomocí Euklidových vět:* $a^{2}=c∙c\_{a}; b^{2}=c∙c\_{b}; v^{2}= c\_{a}∙c\_{b}$*.*

*Pomocí nich úpravami levé strany rovnosti dospějeme k pravé straně rovnosti.*

$$\frac{1}{a^{2}}+ \frac{1}{b^{2}}= \frac{1}{c∙c\_{a}}+ \frac{1}{c∙c\_{b}}= \frac{c\_{b}+ c\_{a}}{c∙c\_{a}∙c\_{b}}= \frac{c}{c∙c\_{a}∙c\_{b}}= \frac{1}{c\_{a}∙c\_{b}}= \frac{1}{v^{2}}$$

*Rovnost platí.*

Příklady k procvičování:

1) Vypočítejte obsah obdélníka s délkou strany *a = 84 cm*, je-li jeho úhlopříčka o *72 cm* větší nežli jeho šířka.

(správné řešení: 1 092 cm2)

2) Určete obsah pravoúhlého lichoběžníka se základnami *a = 66 cm, c = 18 cm*, je-li jeho kosé rameno o *36 cm* delší nežli jeho kolmé rameno.

(správné řešení: 588 cm2)

3) V jakém poměru dělí polokružnice úhlopříčku opsaného obdélníka?

(správné řešení: 1 : 4)

4) Rovnoramenný lichoběžník ABCD má větší základnu $\left|AB\right|=9 dm$, rameno $\left|BC\right|=6 dm$ a $\left|∢ACB\right|=90°$. Vypočítejte délku *c* kratší základny a výšky *v* lichoběžníka ABCD.

(správné řešení: c = 1 dm; v = 2$\sqrt{5}$ dm)

5) Vypočítejte délku tětivy v kružnici o poloměru *r = 17 cm*, víte-li že tětiva dělí průměr k ní kolmý v poměru *1 : 16*.

(správné řešení: 16 cm)

6) Přímky AT, AT´ se dotýkají kružnice k(S, r) v bodech T, T´. Přímka TT´ dělí úsečku SA na úseky ⎟ SU⎟ = 1,5 m a ⎟ UA⎟ = 4,5 m. Vypočítejte velikosti:

a) r, b) ⎟ AT⎟.

(správné řešení: a) 3 m; b) $\sqrt{27}$ m)

Použité zdroje a literatura:

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 207 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4907-0.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.