

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**PODOBNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ (včetně stejnolehlosti)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Ondřej Chudoba |
| **Jazyk** | čeština |
| **Datum vytvoření** | 11. 11. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16–19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák umí použít znalosti podobných zobrazení včetně stejnolehlosti k řešení úloh  |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Řešené příklady:**

**1) Narýsujte libovolný trojúhelník *ABC*. Sestrojte těžiště *T* a kružnici *k* trojúhelníku opsanou. Zobrazte kružnici *k* ve stejnolehlosti *H*(*T*, -1/2). Kterými body trojúhelníku *ABC* kružnice *k’* prochází?**

*Řešení:*

Narýsujeme libovolný trojúhelník. Sestrojíme osy stran a z jejich průsečíku kružnici opsanou. Dále nalezneme těžiště trojúhelníka a sestrojíme kružnici *k’* v zadané homotetii. Situace je narýsována na obr. 2 pro obecný ostroúhlý trojúhelník a na obr. 1 pro obecný tupoúhlý trojúhelník.



obr. 1

Rýsujeme-li správně, vyjde nám, že kružnice *k’* prochází body *A*1, *B*1, *C*1, což jsou po řadě středy stran *BC*, *CA*, *AB*.



obr. 2

**2) Jsou dány dvě kružnice se stejným poloměrem *k*(*A*,*r*), *l*(*B*,*r*), které se protínají. Bod *S* je středem úsečky *AB*. Veďte bodem *S* přímku *p* tak, aby její průsečíky s kružnicemi *k, l* byly krajními body tří shodných úseček.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 3). Obrazem kružnice *k* ve stejnolehlosti *H*(*S*,-3) je kružnice *k’*, která protne kružnici *k* ve dvou bodech *D*, *D’*. Body *D* a *S* potom leží na hledané přímce *p*. Úsečky *DE*, *EF*, *FG* jsou potom hledané úsečky o totožné délce. Z těchto úvah plyne postup konstrukce. Je zřejmé, že pokud |*AS*| = *r*, potom má úloha triviální řešení, kdy hledané tři úsečky mají nulovou délku. Pokud |*AS*| < *r*, potom má úloha dvě různá řešení. Pokud |*AB*| < *r*, potom úloha nemá řešení, totiž kružnice *k* a *k‘* pak mají prázdný průnik.

obr. 3

Popis konstrukce.

1, $k^{'};H\left(S,-3\right):k ⟶k'$

2, $D;D=k∩k'$

3, $p;D \in p, S\in p$

4, $E,F,G; \left\{E,F,G\right\}=p∩(k∪k^{'})$

5, $DE, EF, FG$

Konstrukce.

Druhé řešení je označeno stejnými písmeny s čárkou.



k’

obr. 4

Diskuse.

|  |  |
| --- | --- |
| |*AS*| = *r* | 1 řešení |
| |*AS*| < *r* | 2 různá řešení |
| |*AB*| < *r* | žádné řešení |

**3) Jsou dány úsečky *AB*, *CD*, přičemž |*AB*| ≠ |*CD*| a *AB* || *CD*. Určete podobné zobrazení, v němž je úsečka *CD* obrazem úsečky *AB*.**

*Řešení:*

Je vhodné si situaci nakreslit. Viz obr. 5. Jedná se o stejnolehlost. Jejím středem je průsečík přímek *AC* a *BD*. Koeficient stejnolehlosti je |*SA*|/|*SC*|. Druhá možnost (obr. 6): středem stejnolehlosti je průsečík přímek *AD* a *BC*. Koeficient této stejnolehlosti je potom –|*SD*|/|*SA*|.



obr. 5



obr. 6

**4) Je dán ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Vepište do něj čtverec *KLMN* tak, aby strana *KL* ležela na straně *c*, bod *N* na straně *b* a bod *M* na straně *a*.**

*Řešení:*

Předpokládejme, že úloha má řešení a je vyřešena (viz obr. 7). Čtverec *K´L´M´N´* splňuje zadání až na to, že bod *M´* neleží na straně *a*. Ve stejnolehlosti se středem *A* a koeficientem |*AM*|/|*A´M´*| přejde tento čtverec ve čtverec *KLMN*, který již zadání splňuje bez výhrady. Odtud plyne postup konstrukce: nejprve do trojúhelníka narýsujeme čtverec *K´L´M´N´* podobně jako v obr. 7. Potom polopřímka *AM´* protne stranu a v bodě *M*.



obr. 7

Popis konstrukce.

1,$ K´L´M´N´;K´L´ leží na straně c, N´ leží na str. b a bod M´ leží uvnitř trojúhelníka ABC^{ }$

2, $AM´$

3, $M;M \in AM´∩BC$

4, $K;H\left(A,\frac{\left|AM\right|}{\left|AM´\right|}\right):K´ \rightarrow K$

5, $L;H\left(A,\frac{\left|AM\right|}{\left|AM´\right|}\right):L´ \rightarrow L$

6, $N;H\left(A,\frac{\left|AM\right|}{\left|AM´\right|}\right):N´ \rightarrow N$

7, čtverec $KLMN$

Konstrukce.



obr. 8

**5) Je dán čtyřúhelník *ABCD*. Na polopřímce *AB* sestrojte bod *X* a na polopřímce *CD* bod *Y* tak, aby přímka *XY* a *BC* byly rovnoběžné a aby přímka *AC* půlila úsečku *XY*.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení a je vyřešena (viz obr. 9). Označme *S*průsečík přímek *AB* a *CD*. Zřejmě platí *XY* || *BC*, to znamená, že přímky *XY* a *BC* jsou stejnolehlé ve stejnolehlosti se středem *S* a nějakým koeficientem *k*. Z obrázku vyplývá, že *k* = |*SSXY*|/|*SSBC*|.



obr. 9

Popis konstrukce.

1, čtyřúhelník *ABCD*

2, $S;S\in AB ∩CD$

3, $S\_{BC}$

4, $S\_{XY};S\_{XY} \in AC∩SS\_{BC}$

5, $XY\_{ };H\left(S,\frac{\left|SS\_{XY}\right|}{\left|SS\_{BC}\right|}\right):BC \rightarrow XY$

Konstrukce.



obr. 10

Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

**6) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno |*AC*|:|*BC*| = 3:2, *γ* = 70°, *vc* = 5 cm.**

*Řešení:*

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení a je vyřešena (viz obr. 11). Trojúhelník *A´B´C* má délku strany *A´C* 3 cm a *B´C* 2 cm, můžeme jej tedy narýsovat podle věty *sus*. Trojúhelník *ABC* je obrazem trojúhelníka *A´B´C* ve stejnolehlosti se středem *C* a koeficientem |*CC0*|/|*CC0*´|. Nejprve tedy narýsujeme trojúhelník *A´BC*´. A potom pomocí zmíněné stejnolehlosti nalezneme body *A* a *B*.

obr. 11

Popis konstrukce.

1, $A´B´C;podle věty sus, viz rozbor$

3, $n;n je kolmá na A´B´, bod C leží na n$

4, $C´\_{0}; C´\_{0}\in n∩A´B´$

5, $k;k\left(C, 5 cm\right)$

6, $C\_{0}; C\_{0}\in k∩n$

7, $A\_{ };H^{ }\left(C,\frac{\left|CC\_{0}\right|}{\left|CC´\_{0}\right|}\right):A´ \rightarrow A\_{ }$

8, $B;H\left(C,\frac{\left|CC\_{0}\right|}{\left|CC´\_{0}\right|}\right):B´ \rightarrow B\_{ }$

9, trojúhelník *ABC*

Konstrukce.



obr. 12

**Úlohy k procvičení:**

1. Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno *a:b:c* = 7:4:5, *v*b = 4 cm.

[Návod: Sestrojte pomocný trojúhelník *A´B´C´*, kde |*A´B´*| = 5 cm, |*B´C´*| = 7 cm a |*A´C´*| = 4 cm. Užijte stejnolehlost se středem v bodě *B*´.]

1. Jsou dány kružnice *k*(*S*1, *r*1) a *l*(*S*2, *r*2). Sestrojte společné tečny těchto kružnic (|*S*1*S*2| > *r*1 + *r*2).

[Návod: Uvažujte stejnolehlost, kdy se jedna kružnice zobrazí na druhou.]

1. Vrchol *A* trojúhelníku *ABC* leží mimo nákresnu. Určete střed strany *AB*.

[Návod: Zvolte pomocnou úsečku $A^{'}B^{'}∥AB, A^{'}\in CA, B^{'}\in CB$ a sestrojte její střed O’, užijte stejnolehlosti se středem v bodě *C*.]

1. Do kružnice *k*(*S*,4 cm) vepište obdélník *ABCD*, pro který platí |*AB*|:|*BC*| = 3:4.

[Návod: Užijte stejnolehlosti se středem v bodě *S*.]

1. Je dán čtverec *ABCD* se středem *S*. Určete poměr podobnosti, která zobrazuje body *A*, *B*, *S* po řadě na body *B, D, C*.

[$k= \sqrt{2}$]

1. Je dán ostrý úhel *AVB* a bod *M*, který leží uvnitř úhlu *AVB*. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky *KLM*, pro něž platí: vrchol *L* leží na polopřímce *VB*, vrchol *K* na polopřímce *VA*, přičemž |*LK*| = |*KM*| a *LK* je kolmá na *VA*.

[Návod: Řešte užitím stejnolehlosti se středem *V.* Pokud je úhel *AVB* menší než 45°, úloha má 2 řešení, pokud je jeho velikost 45° a více a zároveň menší než 90°, úloha má 1 řešení.]

1. Do půlkruhu s průměrem *AB* vepište čtverec *KLMN* tak, aby strana *KL* ležela na úsečce *AB* a další dva vrcholy *M, N* na dané půlkružnici.

[Návod: Sestrojte libovolný čtverec *K´L´M´N´* tak, aby strana *K´L´* ležela na úsečce *AB* a přitom střed *S* úsečky *AB* byl i středem strany *K´L´.* Použijte stejnolehlost se středem *S*. Úloha má vždy jediné řešení. ]

Autor souhlasí s bezplatným používáním tohoto materiálu pro potřeby výuky a vzdělávání na všech typech škol a školských zařízení. Jakékoliv další využití podléhá licenci Creative Commons, BY-NC-SA.

Autorem všech obrázků je Ondřej Chudoba. Autor souhlasí s jejich bezplatným používáním. Jakékoliv jejich další využití podléhá licenci Creative Commons, BY-NC-SA. Obrázky byly vytvořeny pomocí programu Geogebra (v. 4.0.19.0). Na požádání (chudoba/at/gvm/dot/cz) autor poskytne příslušné soubory typu .ggb.

**Použité zdroje a literatura:**

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-358-5.