

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**Kvadratické rovnice s parametrem**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština17. 11. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá řešení kvadratických rovnic s parametrem a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Kvadratické rovnice s parametrem**

**Příklad 1**

 Řešte v ***R*** kvadratickou rovnici s parametrem $a\in R$**:**

$$2ax^{2}+ax-1=0$$

*Řešení:*

 Daná rovnice je kvadratická pro $a\ne 0$. Pro $a=0$ dostáváme po dosazení do rovnice nepravdivý výrok $-1=0$, rovnice nemá řešení.

 Dále tedy uvažujme případ $a\ne 0$. Daná rovnice je kvadratická a o jejím řešení rozhoduje diskriminant $D=b^{2}-4ac= a^{2}-4·2a·\left(-1\right)= a^{2}+8a$.

* $D >0$ $a^{2}+8a >0$

$$a·(a+8)>0$$

$a\in (-\infty ;-8)∪(0; +\infty )$.

Daná rovnice má řešení

$$x\_{1,2}=\frac{-a\pm \sqrt{a^{2}+8a}}{4a}$$

* $D=0$ $a^{2}+8a=0$

$a=-8;a=0$.

Případ $a=0$ však nebudeme uvažovat (viz předchozí) a po dosazení $a=-8$ do zadání dostáváme rovnici $-16x^{2}-8x-1=0$. Jejím řešením je dvojnásobný kořen $x=-\frac{1}{4}$.

* $D <0$$ a^{2}+8a <0$

$$a·(a+8)<0$$

$$a\in (-8;0)$$

 Rovnice nemá reálné kořeny.

 **Shrnutí:**

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| $$a\in (-\infty ;-8)∪(0; +\infty )$$ | $$\left\{\frac{-a\pm \sqrt{a^{2}+8a}}{4a}\right\}$$ |
| $$a=-8$$ | $$\left\{-\frac{1}{4}\right\}$$ |
| $$a\in (-8;\left.0\right⟩$$ | $$∅$$ |

**Příklad 2**

 Řešte v ***R*** kvadratickou rovnici s parametrem $a\in R$**:**

$$\left(2a+3\right)x^{2}+x-a+4=0$$

*Řešení:*

Daná rovnice je kvadratická pro $a\ne -\frac{3}{2}$. Je-li $a=-\frac{3}{2}$, je rovnice lineární a dostáváme

$x+ \frac{3}{2}+4=0$.

Jejím řešením je $x= -\frac{11}{2}$.

Dále tedy budeme pokračovat za předpokladu, že $a\ne -\frac{3}{2}$. Rovnice bude kvadratická a o řešení rozhoduje diskriminant *D*. V našem případě je

 $a=\left(2a+3\right);b=1;c= -a+4$

a proto *D* = $b^{2}-4ac=1-4·\left(2a+3\right)·\left(-a+4\right)=8a^{2}-20a-47$.

Řešením rovnice $8a^{2}-20a-47=0$ získáme nulové body a to

 $a\_{1}=\frac{5+\sqrt{119}}{4}$ a $a\_{2}=\frac{5-\sqrt{119}}{4}$.

Proto

* $D>0$ $a\in \left(-\infty ; \frac{5-\sqrt{119}}{4}\right)∪(\frac{5+\sqrt{119}}{4}; +\infty )$

a daná rovnice má řešení

$$x\_{1,2}=\frac{-1\pm \sqrt{8a^{2}-20a-47}}{2·(2a+3)}$$

* $D=0$ pro $a\_{1}=\frac{5+\sqrt{119}}{4}$ nebo pro $a\_{2}=\frac{5-\sqrt{119}}{4}$

Potom pro $a\_{1}=\frac{5+\sqrt{119}}{4}$ je $x\_{1}=x\_{2}=\frac{-1}{11+\sqrt{119}}$

 a pro $a\_{2}=\frac{5-\sqrt{119}}{4}$ je $x\_{3}=x\_{4}=\frac{-1}{11-\sqrt{119}}$

* $D<0$ pro $a\in \left(\frac{5-\sqrt{119}}{4}; \frac{5+\sqrt{119}}{4}\right)$ a daná rovnice nemá reálné kořeny.

**Shrnutí:**

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| $$a=-\frac{3}{2}$$ | $$\left\{-\frac{11}{2}\right\}$$ |
| $$a=\frac{5-\sqrt{119}}{4}$$ | $$\left\{\frac{-1}{11-\sqrt{119}}\right\}$$ |
| $$a=\frac{5+\sqrt{119}}{4}$$ | $$\left\{\frac{-1}{11+\sqrt{119}}\right\}$$ |
| $$a\in \left(-\infty ; \frac{5-\sqrt{119}}{4}\right)∪(\frac{5+\sqrt{119}}{4}; +\infty )$$ | $$\left\{\frac{-1\pm \sqrt{8a^{2}-20a-47}}{2·(2a+3)}\right\}$$ |
| $$a\in \left(\frac{5-\sqrt{119}}{4}; \frac{5+\sqrt{119}}{4}\right)$$ | $$∅$$ |

**Příklad 3**

 Při kterých hodnotách parametru $p\in R$márovnice

$$\left(2p+3\right)x^{2}-2\left(p+4\right)x+p-2=0$$

 dvojnásobný reálný kořen?

*Řešení:*

 Je-li $p=-\frac{3}{2}$, je zadaná rovnice lineární a řešením je jediný kořen $x=-\frac{7}{10}$. Dále budeme uvažovat, že $p\ne -\frac{3}{2}$.

 Určíme si diskriminant $D=-4p^{2}+36p+88$. Rovnice bude mít jeden dvojnásobný reálný kořen v případě, že $D=0$, tj. pro $p\_{1,2}=\frac{-9\pm \sqrt{81+88}}{-2}=\frac{-9\pm 13}{-2}$ a $p\_{1}=-2$; $p\_{2}=11$.

1. $p\_{1}=-2$

Potom zadaná rovnice má tvar $x^{2}+4x+4=0$ a jejím řešením je dvojnásobný reálný kořen $x\_{1,2}=-2$.

1. $p\_{2}=11$

Potom zadaná rovnice má tvar $25x^{2}-30x+9=0$ a jejím řešením je dvojnásobný reálný kořen $x\_{1,2}=\frac{3}{5}$.

**Shrnutí:**

|  |  |
| --- | --- |
| *p* | *x* |
| $$p=-2$$ | -2 |
| $$p=11$$ | $$\frac{3}{5}$$ |

**Úlohy k procvičení**

1. V množině reálných čísel řešte rovnici s parametrem $a\in R$**:**

$x^{2}-2ax+2a^{2}-9=0$.

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| $$a\in (-3;3)$$ | $$\left\{a\pm \sqrt{9-a^{2}}\right\}$$ |
| $$a=3$$ | $$\left\{3\right\}$$ |
| $$a=-3$$ | $$\left\{-3\right\}$$ |
| $$a\in (-\infty ; -3)∪(3; +\infty )$$ | $$∅$$ |

1. V množině reálných čísel řešte rovnici s parametrem $a\in R$**:**

$$ax\left(3x+4\right)= x^{2}+1$$

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| $$a=0$$ | $$∅$$ |
| $$a=\frac{1}{3}$$ | $$\left\{\frac{3}{4}\right\}$$ |
| $$a=-1$$ | $$\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$ |
| $$a=\frac{1}{4}$$ | $$\left\{2\right\}$$ |
| $$a\in (-1;0)∪(0; \frac{1}{4})$$ | $$∅$$ |
| $$a\in (-\infty ; -1)∪(\frac{1}{4}; \frac{1}{3})∪(\frac{1}{3}; +\infty )$$ | $$\left\{\frac{-4a\pm \sqrt{16a^{2}+12a-4}}{6a-2}\right\}$$ |

1. Určete, pro které hodnoty parametru $a\in R$má rovnice

 $\left(a+2\right)x^{2}+2\left(a+3\right)x+a-1=0 $dvojnásobný reálný kořen.

$$\left[a=-\frac{11}{5}; x\_{1,2}=4\right]$$

1. Určete, pro které hodnoty parametru $a\in R$má rovnice

$2\left(a+2\right)x^{2}-24x+a+3=0$ dva reálné různé kořeny.

$$\left[a\in (-11;6)\right]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a CALDA Emil. *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-366-0.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.