

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**LINEÁRNÍ ROVNICE S PARAMETREM A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC S PARAMETREM**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština14. 10. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá řešení lineárních rovnic s parametrem a soustav lineárních rovnic s parametrem a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Lineární rovnice s parametrem a soustavy rovnic s parametrem**

**Příklad 1**

Řešte v ***R*** rovnici $\frac{x+a}{a}=ax-1$ s parametrem $a\in R$**.**

*Řešení:*

 Nejprve stanovíme podmínky řešitelnosti rovnice – je zřejmé, že $a\ne 0$. Potom

$$x+a=a^{2}x-a$$

$$x-a^{2}x=-2a$$

$$x.\left(1-a\right).\left(1+a\right)=-2a$$

Je-li nyní *a* = 1 nebo *a* = -1, dostaneme nepravdivý výrok a to buď 0.x = - 2 nebo 0.x = 2. Proto dále předpokládejme, že $a\ne \pm 1$. Pak

$$x=\frac{2a}{\left(a-1\right).(a+1)}$$

 Shrnutí:

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| *a* = 1 | $$∅$$ |
| *a* = - 1  | $$∅$$ |
| *a* = 0 | $$∅$$ |
| $$a\ne 0, a\ne \pm 1$$ | $$\left\{\frac{2a}{a^{2}-1}\right\}$$ |

**Příklad 2**

 Řešte v ***R*** rovnici $\frac{2-a}{a}=\frac{2}{x-1}$ s parametrem $a\in R$**.**

*Řešení:*

Rovnice má smysl pouze při $a\ne 0$ a dále pro $x\ne 1$. Potom

$$\left(2-a\right).\left(x-1\right)=2a$$

$$2x-ax-2+a=2a$$

$$x.\left(2-a\right)=a+2$$

Je-li nyní *a* = 2, získáme nepravdivý výrok 0.x = 4. Dále tedy budeme předpokládat, že $a\ne 2$. Takže

$$x=\frac{a+2}{2-a}$$

Shrnutí:

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| *a* = 0 | $$∅$$ |
| *a* = 2 | $$∅$$ |
| $$a\ne 0, a\ne 2$$ | $$\left\{\frac{a+2}{2-a}\right\}$$ |

**Příklad 3**

 Řešte v ***R*** rovnici $\frac{m}{x}-\frac{4}{mx}=1-\frac{2}{m}$ s parametrem $m\in R$**.**

*Řešení:*

Zadaná rovnice má smysl při $m\ne 0$ a dále $x\ne 0$. Tedy

$$m^{2}-4=mx-2x$$

$$x.\left(m-2\right)=\left(m-2\right).(m+2)$$

Je-li nyní *m* = 2, dostáváme rovnici 0.x = 0 a ta je splněná pro každé reálné číslo. Nesmíme ale zapomenout na podmínky řešitelnosti a vyloučit případ *x* = 0. Dále musíme uvážit možnost *m* = -2; v tomto případě nemá rovnice žádné řešení, protože vychází *x* = 0 a to není vzhledem k podmínkám možné. Potom

$$x=m+2$$

 Shrnutí

|  |  |
| --- | --- |
| *m* | **K** |
| *m* = 0 | $$∅$$ |
| *m* = 2 | $$R- \left\{0\right\}$$ |
| *m* = - 2 | $$∅$$ |
| $$m\ne 0;m\ne \pm 2$$ | $$\left\{m+2\right\}$$ |

**Příklad 4**

Obvod předního kola vozu je *a* metrů, zadního *b* metrů ($b>a)$. Na jak veliké dráze udělá přední kolo o 1 otáčku víc než zadní?

*Řešení:*

 Zadanou úlohu řešíme vzhledem k uražené dráze, parametry jsou obvody kol. Obě kola urazí stejnou vzdálenost d a platí, že

d = n1.a

d = n2.b

kde n1 je počet otáček P kola a n2 je počet otáček Z kola. Podle zadání má být n1= n2+ 1. Tedy

d = (n2 + 1).a

d = n2.b $\rightarrow $ $n\_{2}= \frac{d}{b}$

$$d=\left(\frac{d}{b}+1\right).a$$

$$d=\frac{d.a}{b}+a$$

$$d.b=d.a+a.b$$

$$d.b-d.a=a.b$$

$$d=\frac{a.b}{b-a}$$

Přední kolo vykoná o 1 otáčku víc než zadní na dráze $\frac{a.b}{b-a}$ metrů.

**Příklad 5**

Řešte soustavu rovnic s neznámými *x, y* a parametrem $a\in R$**:**

$3x+ay=1$

$$x+2y=3$$

*Řešení:*

 Z druhé rovnice si vyjádříme neznámou $x=3-2y$ a dosadíme do první rovnice

$$3.\left(3-2y\right)+ay=1$$

$$9-6y+ay=1$$

$$y.\left(a-6\right)=-8$$

 Je-li $a=6$, nemá daná soustava žádné řešení. Je-li $a\ne 6$, potom $y=\frac{8}{6-a}$ a dosazením pro *x* dostaneme $x=3-2.\frac{8}{6-a}=\frac{18-3a-16}{6-a}=\frac{2-3a}{6-a}$.

Shrnutí:

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| $$a=6$$ | $$∅$$ |
| $$a\ne 6$$ | $$\left\{\left[\frac{2-3a}{6-a}; \frac{8}{6-a}\right]\right\}$$ |

**Úlohy k procvičení**

1. Řešte v ***R*** rovnici $\frac{kx+1}{x-2}=\frac{kx-1}{x+2}$ s parametrem $k\in R$**.**

[Je-li $k\ne -\frac{1}{2}$, má daná rovnice jediný kořen $x=0$. Je-li $k=-\frac{1}{2}$, vyhovuje dané rovnici každé $x\ne \pm 2.$]

1. Řešte v ***R*** rovnici $1+\frac{k^{2}-1}{x}=k$ s parametrem $k\in R$**.**

[Je-li $k=1$, vyhovuje rovnici každé $x\ne 0$. Je-li $k=-1$, rovnice nemá žádný kořen. Je-li $k\ne \pm 1$, má rovnice řešení $x=k+1$.]

1. Řešte v ***R*** rovnici $\frac{k^{2}(x-1)}{kx-2}=2$ s parametrem $k\in R$**.**

[Je-li $k=0$, nemá daná rovnice žádné řešení. Je-li $k=2$, vyhovuje dané rovnici každé $x\ne 1$; pro $k\ne 0 a k\ne 2$ má rovnice řešení $x=\frac{k+2}{k}$.]

1. Z místa *A* vyjelo auto rychlostí *v1* km/h směrem k místu *B* vzdálenému *d* km od *A*. Z místa *B* vyjelo ve stejný okamžik jiné auto rychlostí *v2* km/h $(v\_{1}>v\_{2})$ a) opačným směrem, b) stejným směrem. Za jak dlouho a v jaké vzdálenosti od místa *B* se setkají?

[a) Setkají se za $\frac{d}{v\_{1}+v\_{2}}$ hodin ve vzdálenosti $\frac{d.v\_{2}}{v\_{1}+v\_{2}}$ km od místa *B*. b) První auto dohoní druhé auto za $\frac{d}{v\_{1}- v\_{2}}$ ve vzdálenosti $\frac{d.v\_{2}}{v\_{1}- v\_{2}}$ km od místa *B*. ]

5. Řešte soustavu rovnic s neznámými *x, y* a parametrem $a\in R$**:**

$3\left(ax-1\right)=-y$ $3\left(ay-1\right)=-x$

|  |  |
| --- | --- |
| *a* | **K** |
| $$a=\frac{1}{3}$$ | $$\left\{\left[x;3-x\right]\right\}$$ |
| $$a=-\frac{1}{3}$$ | $$∅$$ |
| $$a\ne \pm \frac{1}{3}$$ | $$\left\{\left[\frac{3}{3a+1}; \frac{3}{3a+1}\right]\right\}$$ |

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.