

Projekt

**ŠABLONY NA GVM**

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2     Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

**KVADRATICKÉ ROVNICE A NEROVNICE**

**(včetně řešení v C)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Autor** | Petr Vrána |
| **Jazyk****Datum vytvoření** | čeština6. 10. 2012 |
| **Cílová skupina** | žáci 16 – 19 let |
| **Stupeň a typ vzdělávání** | gymnaziální vzdělávání |
| **Druh učebního materiálu** | vzorové příklady a příklady k procvičení |
| **Očekávaný výstup** | žák ovládá kvadratické rovnice a nerovnice a to i v oboru komplexních čísel a umí je aplikovat při řešení úloh |
| **Anotace** | materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce |

**Kvadratické rovnice a nerovnice (včetně řešení v C)**

**Příklad 1**

 V množině ***R*** řešte rovnici $2x^{2}-5x=0$.

*Řešení:*

Jedná se o neúplnou kvadratickou rovnici bez absolutního členu. Vyřešíme ji převedením na rovnici v součinovém tvaru a to:

$$2x^{2}-5x=0$$

$$x.\left(2x-5\right)=0$$

$$x\_{1}=0; x\_{2}= \frac{5}{2}$$

*Pozn.: Zkouška není nutná, prováděli jsme ekvivalentní úpravy.*

**Příklad 2**

V množině ***R*** řešte rovnici $3x^{2}-27=0$.

*Řešení:*

Jedná se o ryze kvadratickou rovnici bez lineárního členu. Tento typ rovnice můžeme řešit dvěma způsoby – rozložením na součin nebo využít absolutní hodnotu.

1. *způsob:*

$$3x^{2}-27=0$$

$$3.\left(x^{2}-9\right)=0$$

$$3.\left(x+3\right).\left(x-3\right)=0$$

$$x\_{1 }= -3; x\_{2}=3$$

1. *způsob:*

$$3x^{2}=27$$

$$x^{2}=9$$

$$\left|x\right|= \sqrt{9}$$

$$x\_{1}=3; x\_{2}= -3$$

**Příklad 3**

 V množině ***R*** řešte rovnici $x^{2}-5x+6=0$.

*Řešení:*

Jedná se o úplnou kvadratickou rovnici. Tento typ rovnic řešíme užitím Viètových vztahů nebo použitím vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

1. *způsob:*

$$m+n= -5, m.n=6$$

$$m= -2;n= -3$$

$$Proto \left(x-2\right).\left(x-3\right)=0$$

$$x\_{1}=2; x\_{2}=3$$

1. *způsob:*

$$x\_{1,2}= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}= \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x\_{1}=2; x\_{2}=3$$

**Příklad 4**

V množině ***R*** řešte rovnici $2x^{2}-5x-3=0$.

*Řešení:*

Zde bude výhodnější použít vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice. Tedy

$$x\_{1,2}= \frac{5\pm \sqrt{25+24} }{4}= \frac{5\pm 7}{4}$$

$$x\_{1}=3; x\_{2}= -\frac{1}{2}$$

**Příklad 5**

V množině ***R*** řešte rovnici $3x^{2}+2x+1=0$.

*Řešení:*

 Opět využijeme vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice. Dostáváme

$$x\_{1,2}= \frac{-2\pm \sqrt{4-12} }{6}$$

 Pod odmocninou vychází záporné číslo → v množině ***R*** nelze řešit a rovnice nemá v této množině řešení.

**Příklad 6**

V množině ***C*** řešte rovnici $3x^{2}+2x+1=0$.

*Řešení:*

Nyní se situace mění, v množině komplexních čísel je tato rovnice řešitelná. Diskriminant rovnice je *D* = - 8 a dosazením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice vypočítáme

$$x\_{1,2}=\frac{-2\pm i\sqrt{8}}{6}=\frac{-2\pm i.2\sqrt{2}}{6}$$

$$x\_{1}=\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}; x\_{2}=\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}$$

**Příklad 7**

V množině ***C*** řešte rovnici $ix^{2}+2x-5i=0$

*Řešení:*

 Jedná se o kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty. Diskriminant zadané rovnice je *D* = 4 + 20*i2* = - 16 = 16.(cos *π* + *i* sin π). Dosazením do vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice vypočítáme

$$x\_{1,2}=\frac{-2\pm \sqrt{16}(\cos(\frac{π}{2}+i.\sin(\frac{π}{2})))}{2i}=\frac{-2\pm 4i}{2i}=\pm 2+i $$

**Příklad 8**

V množině ***R*** řešte nerovnici $x^{2}-2x-15\leq 0.$

*Řešení:*

S využitím Viètových vztahů upravíme levou stranu nerovnice na součinový tvar a dostáváme

$$\left(x-5\right).\left(x+3\right)\leq 0$$

 Množinou všech řešení je potom interval $\left⟨-3;\left.5\right⟩\right.$.

**Příklad 9**

V množině ***R*** řešte nerovnici $16x^{2}+24x+9>0.$

*Řešení:*

Pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice určíme nulové body levé strany nerovnice a poté rozložíme na součin. Tedy

$$x\_{1,2}= \frac{-24\pm \sqrt{576-16.36}}{32}= \frac{-24\pm 0}{32}=-\frac{3}{4}$$

Získali jsme jeden dvojnásobný reálný kořen, koeficient *a* = + 16 (parabola je tedy „otočená“ nahoru) a řešením je

$$\left(-\infty ;\left.-\frac{3}{4}\right)∪\left(-\frac{3}{4};+\infty \right)\right.$$

**Úlohy k procvičení**

Řešte v množině ***R*** následující rovnice:

1. $3x^{2}+4x=0$ [x1 = 0; x2 = $-\frac{4}{3}$]
2. $-2x^{2}+6x=0$ [x1 = 0; x2 = 3]
3. $x^{2}-16=0$ [x1 = 4; x2 = - 4]
4. $2x^{2}+8=0$ [$∅$]
5. $x^{2}-6x-216=0$ [x1 = 18; x2 = - 12]
6. $x^{2}-64x-1621=0$ [x1 = 32+23.$\sqrt{5}$; x2 = 32-23.$\sqrt{5}$]
7. $5x^{2}-18x-8=0$ [x1 = 4; x2 = $-\frac{2}{5}$]
8. $2x^{2}+1,1x-3,91=0$ [x1 = 1,15; x2 = - 1,7]
9. $x^{2}-10x+28=0$ [$∅$]
10. $x^{2}-30x+302=0$ [$∅$]

Řešte v množině ***C*** následující rovnice:

1. $5x^{2}-2x+1=0$ [$x\_{1,2}=\frac{1}{5}\pm \frac{2}{5}i$]
2. $3x^{2}-2x+1=0$ [$x\_{1,2}=\frac{1}{3}\pm \frac{\sqrt{2}}{3}i$]
3. $x^{2}-6ix-12=0$ [$x\_{1,2}=\pm \sqrt{3}+3i$]
4. $x^{2}+x.\left(2-i\right)+3-i=0$ [$x\_{1}=-1+2i; x\_{2}=-1-i$]

Řešte v množině ***R*** následující nerovnice:

1. $x^{2}+11x+24<0$ [$\left(-8; -3\right)$]
2. $-x^{2}+5x-6>0$ [$\left(2; 3\right)$]
3. $x^{2}-6x+8\geq 0$ [$\left(-\infty ;\left.2\right⟩∪\left⟨4; +\infty )\right.\right.$]
4. $x^{2}+3x+2\geq 0$ [$\left(-\infty ;\left.-2\right⟩∪\left⟨-1; +\infty )\right.\right.$]

*Bonus*

1. *Součet dvou čísel je 79, součet jejich druhých mocnin je 4225. Určete tato čísla.*      (63; 16)
2. *Dvojciferné číslo má ciferný součet 9. Vyměníme-li obě číslice, vznikne číslo, které znásobené původním dá součin 2430. Které je to číslo?*  (45; 54)

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-364-6.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.