INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

FINANČNÍ MATEMATIKA- INFLACE

Autor	Hana Macholová
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	8. 3. 2014
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák chápe pojem inflace, dokáže vypočítat hodnotu peněz po určitém období při dané hodnotě inflace, umí vypočítat jednotlivé proměnné týkající se průběžného spoření.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

<u>Poznámka:</u>

Inflace je definována jako proces všeobecného růstu cenové hladiny, což znamená snižování kupní síly peněz.
Míra inflace je relativní nárůst cenové hladiny za příslušné období.
Nominální úroková míra i je úroková míra uváděná bankami - je to podíl úroku získaného za rok a zapůjčeného kapitálu (bez zohlednění zdanění a inflace).
Reálná úroková míra je úroková míra očištěná o inflaci (i o daň z úroku).

Při výpočtech budeme používat následující označení:

i_i – míra inflace vyjádřená v procentech
P_0 – počáteční cena zboží
P_n – konečná cena zboží
I_0 – počáteční hodnota peněz
I_n – reálná hodnota peněz po n letech
K_0 – počáteční (vložený) kapitál
K_n – kapitál na konci n-tého úrokovacího období
i – nominální úroková míra vyjádřená desetinným číslem
i_r – reálná úroková míra
k – zdaňovací koeficient
u – daň z úroku vyjádřená v procentech
t – délka úrokovacího období vyjádřená ve dnech
n – počet úrokovacích období

Kromě vztahů, které odvodíme, budeme využívat následující vzorce:

$$k = \frac{100-u}{100}$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n$$

Samozřejmě v případě, že úrokovací období bude jeden rok, můžeme ze vztahů zlomek $\frac{t}{360}$ vynechat, protože když dosadíme za t = 360, pak dostaneme zlomek $\frac{360}{360} = 1$.
Pro výpočet reálné úrokové míry se využívá tzv. Fisherova rovnice:

$$i = i_r + i_i + i_r i_i$$

Přitom při nízkých hodnotách míry inflace součin $i_r i_i$ zanedbáváme a reálnou úrokovou míru vyjádříme

$$i_r \cong k \cdot i - i_i$$

Reálná hodnota kapitálu K_r na konci roku (úročí-li banka na konci roku): $K_r = K_0 \cdot (1 + i_r)$

Řešené úlohy:

1. Kolik korun budeme muset zaplatit na konci tohoto roku průměrně za zboží, které stálo na konci minulého roku 15000 Kč, dosáhne-li v tomto roce míra inflace 3 %? (Vycházíme z předpokladu, že námi nakupované zboží se zdražilo právě o tři procenta.)

   Řešení:

   $P_0 = 15000\ K\check{c}$
   $i_i = 3\%$
   $P_1 = ?\ K\check{c}$

   Cena se zvýší o tři procenta:

   $P_1 = P_0 + 0{,}03P_0 = 1{,}03P_0$
   $P_1 = 1{,}03 \cdot 15000 = 15450$
   $\underline{\underline{P_1 = 15450\,K\check{c}}}$

   Na konci tohoto roku budeme muset za dané zboží zaplatit 15450 Kč.

   Pozn.: Obecně tedy platí vztah $P_1 = \left(1 + \frac{i_i}{100}\right) \cdot P_0$

2. Kolik budeme muset zaplatit za deset let za zboží, které na konci minulého roku stálo 15000 Kč, bude-li průměrná míra inflace během daného období 3 %? (Opět vycházíme z předpokladu, že námi nakupované zboží se zdražilo právě o tři procenta.)

   Řešení:

   $P_0 = 15000\ K\check{c}$
   $i_i = 3\%$
   $n = 10$
   $P_{10} = ?\ K\check{c}$
   Zjistíme, kolik bude dané zboží stát po jednom roce, dvou letech a odvodíme vztah pro cenu zboží po n letech.

   $P_0 = 15000$
   $P_1 = 1{,}03P_0$
   $P_2 = 1{,}03P_1 = 1{,}03 \cdot 1{,}03P_0 = 1{,}03^2\,P_0$
   $\vdots$
   $P_{10} = 1{,}03^{10}\,P_0$
   $P_{10} = 20158{,}75\ K\check{c}$

Za deset let budeme muset za dané zboží zaplatit 20158,75 Kč.

Pozn.: Obecně tedy platí vztah $P_n = \left(1 + \frac{i_i}{100}\right)^n \cdot P_0$.

3. Jaká bude reálná hodnota 100000 Kč po jednom roce, je-li míra inflace 5 %?

   Řešení:

   Nejprve si opět vyřešíme příklad bez znalosti vzorce:
   Zboží za 100 Kč má na konci roku cenu 105 Kč, jinak řečeno na konci roku si za 105 Kč koupíme pouze tolik zboží, jako bychom si na počátku roku koupili za 100 Kč.

   Využijeme přímou úměrnost:
   Současná hodnota 105 Kč …………….. budoucí hodnota 100 Kč
   Současná hodnota 100000 Kč………… budoucí hodnota x Kč

$$\frac{x}{100} = \frac{100000}{105}$$

$$x = \frac{100000}{1{,}05} = \frac{100000}{1 + \frac{5}{100}}$$

$$\underline{\underline{x = 95238{,}10\ Kč}}$$

   Reálná hodnota 100000 Kč po jednom roce při 5% míře inflace bude 95238,10 Kč.

   Pozn.: Obecně platí vztah $I = \frac{I_0}{1 + \frac{i_i}{100}}$.

4. Jaká bude reálná hodnota 100000 Kč na konci druhého roku, bude-li míra inflace v prvním roce 3 % a ve druhém roce 6 %?

   Řešení:

$I_0 = 100000$

$i_{i1} = 3\,\%$

$i_{i2} = 6\,\%$

$I_2 = ?\ Kč$

$$I_1 = \frac{I_0}{1+\frac{i_{i1}}{100}}$$

$$I_2 = \frac{I_1}{1+\frac{i_{i1}}{100}} = \frac{\frac{I_0}{1+\frac{i_{i1}}{100}}}{1+\frac{i_{i2}}{100}} = \frac{I_0}{\left(1+\frac{i_{i1}}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{i_{i2}}{100}\right)} = \frac{100000}{1{,}03\cdot 1{,}06}$$

$$I = 91591{,}87\ K\check{c}$$

Reálná hodnota 100000 Kč bude ve druhém roce 91591,87 Kč.

5. Určete, jaká bude reálná hodnota 100000 Kč po deseti letech, pokud bude v tomto období průměrná míra inflace 4 %?

   Řešení:

   Hodnota 100000 Kč:

   po 1. roce ……………………… $I_1 = \frac{I_0}{1+\frac{i_i}{100}}$

   po 2. roce ……………………… $I_2 = \frac{I_1}{1+\frac{i_i}{100}} = \frac{\frac{I_0}{1+\frac{i_i}{100}}}{1+\frac{i_i}{100}} = \frac{I_0}{\left(1+\frac{i_i}{100}\right)^2}$

   $\vdots$

   po 10. roce……………………… $I_{10} = \frac{I_0}{\left(1+\frac{i_i}{100}\right)^{10}}$

$$I_{10} = \frac{I_0}{\left(1+\frac{i_i}{100}\right)^{10}} = \frac{100000}{1{,}04^{10}} = 67556{,}42$$

$$\underline{\underline{I_{10} = 67556{,}42\ K\check{c}}}$$

Reálná hodnota 100000 Kč po deseti letech při 4% inflaci bude 67556,42 Kč.

Pozn.: Obecně platí vztah $I_n = \frac{I_0}{\left(1+\frac{i_i}{100}\right)^n}$.

6. Na začátku roku uložil klient do banky částku 45000 Kč na termínovaný vklad na jeden rok s úrokovou mírou 2,6 % (daň z úroků je 15 %). Banka úročí jednou, v den splatnosti vkladu. Míra inflace dosáhla v daném roce výše 1,5 %.
   a. Kolik korun klient obdržel na konci roku?
   b. Vypočítejte reálnou úrokovou míru s přesností na setiny procenta?
   c. Jaká je reálná hodnota získaného kapitálu?

   Řešení:

   $K_0 = 45000\ Kč$

   $i = 2{,}6\ \%$

   $u = 15\%$

   $i_i = 1{,}9\ \%$

   $k = \dfrac{100-u}{100} = 0{,}85$

   a. $K = K_0(1 + k \cdot i) = K_0 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot i) = 45000 \cdot (1 + 0{,}85 \cdot 0{,}026)$

      $K = 45994{,}5\,Kč$

      Klient na konci roku obdrží 45995 Kč.

   b. Vzhledem k nízké hodnotě míry inflace můžeme využít Fisherovu rovnici

      $i_r \cong k \cdot i - i_i$

      $i_r \cong (0{,}85 \cdot 2{,}6 - 1{,}9)\% = 0{,}31\%$

      Reálná úroková míra je přibližně 0,31 %.

   c. Reálnou hodnotu získaného kapitálu lze vypočítat dvěma způsoby.

      1. zp.:
      Přibližnou hodnotu pomocí vztahu uvedeného v úvodu materiálu:

      $K_r = K_0 \cdot (1 + i_r) = 45000 \cdot (1 + 0{,}003) = 45139{,}5$

      Přibližná reálná hodnota získaného kapitálu je 45139,5 Kč.

      2. zp:
      Zjistíme reálnou hodnotu kapitálu, kterou klient obdrží na konci roku v tomto období:

      $K_r = \dfrac{K}{1 + \dfrac{i_i}{100}} = \dfrac{45994{,}5}{1{,}019} = 45136{,}9$

      $K_r = 45136{,}9\ Kč$

      Reálná hodnota získaného kapitálu je 45136,9 Kč.

Úlohy k procvičení:

1. Kolik korun budeme muset zaplatit na konci tohoto roku průměrně za zboží, které na konci minulého roku stálo 5000 Kč, pokud míra inflace letos dosáhla výše 2,5 %?

   [5125 Kč]

2. Kolik korun stálo na konci minulého roku průměrně zboží, za které zaplatím na konci tohoto roku 5000 Kč, pokud míra inflace letos dosáhla výše 2,5 %?

   [4878 Kč]

3. Určete, jaká bude reálná hodnota 5000 Kč na konci pátého roku, pokud je průměrná hodnota míry inflace v tomto období 6 %?

   [3736,30 Kč]

4. Na začátku roku uložíme do banky kapitál 25000 Kč na jeden rok, banka úročí jednou, v den splatnosti vkladu. Daň z úroku je 15 %. Inflace tento rok dosáhne 2,15 % (předpokládejme přesnou anticipaci inflace). Jak vysokou úrokovou míru by nám měla banka nabídnout, aby reálná hodnota kapitálu, který po roce od banky obdržíme, nebyla vyšší než kapitál?

   [2,53 %]

5. Kapitál 15000 Kč byl uložen do banky na začátku roku na jeden rok s úrokovou mírou 1,9 %. Banka úročí jednou, na konci roku. Daň z úroků je 15 %. Míra inflace dosáhla v daném roce výše 1,8 %. Zjistěte zpaměti, zda je reálná hodnota získaného kapitálu vyšší nebo nižší než vložený kapitál. Vypočítejte, o kolik.

   [nižší, o 27,30 Kč]

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich.: *Matematika pro gymnázia- Posloupnosti a řady*. 1 vydání. Praha: Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-91-7.

ODVÁRKO, Oldřich. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. 1. vydání.* Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-303-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.