INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

FINANČNÍ MATEMATIKA- JEDNODUCHÉ ÚROKOVÁNÍ

Autor	Hana Macholová
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	20. 4. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá využití jednoduchého úrokování a chápe vztah mezi jednoduchým úrokováním a aritmetickou posloupností.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Poznámka:

Při výpočtech budeme používat následující označení:

K_0 – počáteční (vložený) kapitál
K_n – kapitál na konci n-tého úrokovacího období
i – úroková míra vyjádřená desetinným číslem
k – zdaňovací koeficient
u – daň z úroku vyjádřená v procentech
t – délka úrokovacího období vyjádřená ve dnech
n – počet úrokovacích období
U_1 – úrok po zdanění za jedno úrokovací období
U_n – úrok po zdanění na konci n-tého úrokovacího období

Budeme využívat tzv. německý standard 30E/360, což je metoda určování délky úrokovacího období, kdy počítáme, že každý měsíc má 30 dnů, tedy rok má 360 dnů.

V tomto učebním materiálu se budeme věnovat jednoduchému úrokování, tedy úrok budeme počítat stále z počátečního kapitálu.

Využijeme zejména následující vztahy:

$$k = \frac{100 - u}{100}$$

$$U_1 = K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360}$$

$$U_n = U_1 \cdot n = K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n$$

$$K_n = K_0 + U_n = K_0 + K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right)$$

Samozřejmě v případě, že úrokovací období bude jeden rok, můžeme ze vztahů zlomek $\frac{t}{360}$ vynechat, protože když dosadíme za t = 360, pak dostaneme zlomek $\frac{360}{360} = 1$.

Řešené úlohy:

1) Pan Novák uložil na konci roku na vkladní knížku 48 000 Kč. Banka úročí jedenkrát ročně, a to vždy na konci kalendářního roku. Pan Novák vybírá pravidelně na začátku roku úrok za předchozí rok. Úroková míra po celou dobu neměnila a byla 2,5 % a daň z úroků byla 15 %.
    a. Jaký byl jeho úrok před zdaněním v jednotlivých (např. třech) letech?

b. Jaký byl jeho úrok po zdanění v jednotlivých letech?
c. Jakou částku obdržel pan Novák na úrocích za 8 let?

$$K_0 = 48000\ Kč$$
$$i = 0{,}025$$
$$k = \frac{100-15}{100} = 0{,}85$$
$$t = 360$$
$$n = 8$$
$$\underline{u = 15\%}$$

a. Úrok za jeden rok před zdaněním:
$$U_1' = K_0 \cdot i = 48000 \cdot 0{,}025 = 1200$$
$$U_1' = 1200\ Kč$$
Vzhledem ke skutečnosti, že pan Novák každý rok úrok vybral, počítal se úrok za následující roky opět pouze z vloženého kapitálu (48 000 Kč) a byl tedy stále stejný (byl roven 1 200 Kč).

b. Úrok za jeden rok po zdanění:
$$U_1 = U_1' \cdot k = K_0 \cdot i \cdot k = 1200 \cdot 0{,}85 = 1020$$
$$U_1 = 1020\ Kč$$
Opět se úrok po zdanění v jednotlivých letech počítal stále ze stejné částky, a proto byl stále stejný a činil 1 020 Kč.

c. Úroky za 8 let:
$$U_8 = 8 \cdot U_1 = 8 \cdot 1020 = 8160$$
$$U_8 = 8160\ Kč$$
Banka každý rok vyplácela úrok po zdanění 1 020 Kč, a proto za osm let bylo panu Novákovi vyplaceno 8 160 Kč.

2) Jakou částku by musel pan Novák uložit v bance na 2,5% úrok, aby roční úrok (po zdanění 15%) dosáhl 120 000 Kč (tedy 10 000 Kč měsíčně).

$$K_0 = ?$$
$$U_1 = 120000\ Kč$$
$$i = 0{,}025$$
$$\underline{k = 0{,}85}$$

$$U_1 = K_0 \cdot i \cdot k$$

Odtud vyjádříme K_0:

$$K_0 = \frac{U_1}{i \cdot k} = \frac{120\,000}{0{,}025 \cdot 0{,}85} \cong 5\,647\,059$$

$K_0 \cong 5\,647\,059\ Kč$

Aby roční úrok po zdanění dosáhl 120 000, musí pan Novák v bance uložit 5 647 059 Kč.

3) Jakou částku by pan Novák musel uložit v bance na 2,5% úrok, aby jeho měsíční úrok dosáhl 10 000 Kč (pokud by bylo úročení na konci každého měsíce a on by si úrok mohl koncem měsíce vybrat)? Daň z úroku je opět 15 %.

$K_0 = ?$

$U_1 = 10000\ Kč$

$i = 0{,}025$

$k = 0{,}85$

$\underline{t = 30}$

$$U_1 = K_0 \cdot i \cdot k \cdot \frac{t}{360}$$

Odtud vyjádříme I_0:

$$K_0 = \frac{U_1}{i \cdot k \cdot \frac{t}{360}} = \frac{10000}{0{,}025 \cdot 0{,}85 \cdot \frac{30}{360}} = \frac{10000}{0{,}025 \cdot 0{,}85 \cdot \frac{1}{12}} = \frac{12 \cdot 10000}{0{,}025 \cdot 0{,}85} \cong 5\,647\,059$$

$K_0 \cong 5\,647\,059\ Kč$

Aby měsíční úrok dosáhl 10 000 Kč, musí pan Novák uložit 5 647 059 Kč.

Pozn.: Vidíme tedy, že při jednoduchém úročení nezáleží na délce úrokovacího období.

4) Pan Novotný si chce půjčit na osm měsíců peníze. Předem ví, že po osmi měsících bude mít na splacení svého dluhu částku 80 000 Kč. Jakou částku si nyní může od banky nejvýše půjčit v případě, že banka mu nabízí úrokovou míru 14,5 %, půjčuje pouze na celé stokoruny a úročí jedenkrát na konci úrokového období.

$K_n = 80000$

$i = 0{,}145$

$t = 8 \cdot 30 = 240$

$n = 1$

$\underline{k = 1}$ Pan Novotný nespoří, ale splácí, a proto neplatí daň z úroků (u = 0%)

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right)$$

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n} = \frac{80000}{1 + 1 \cdot 0{,}145 \cdot \frac{240}{360} \cdot 1} \cong 72949$$

$K_0 = 72949\ Kč$

Banka ale půjčuje pouze na celé stokoruny, a proto si pan Novotný smí půjčit nejvýše 72 900 Kč.

5) Vklad 30 000 Kč je v bance úročen jednou ročně s úrokovou mírou 3 % a jde o jednoduché úročení. Daň z úroku je 15 %.
   a. Zakreslete do Kartézské soustavy souřadnic prvních pět členů posloupnosti, která vyjadřuje závislost výše celkového úroku po zdanění na počtu let od uložení vkladu.
   b. Rozhodněte, zda je daná posloupnost aritmetická. Pokud ano, určete první člen a diferenci.
   c. Určete, zda je posloupnost vyjadřující závislost celkové výše kapitálu na počtu let od uložení vkladu také aritmetická (případně určete první člen a diferenci).

$K_0 = 30000$

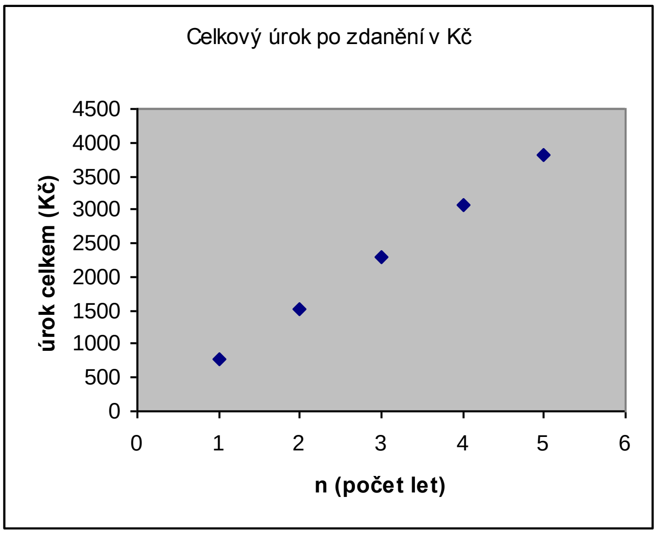
$i = 0{,}03$

$k = 0{,}85$

$\underline{t = 360}$

a. $U_n = k \cdot i \cdot K_0 \cdot n$

Počet let	1	2	3	4	5
Celkový úrok po zdanění v Kč	765	1530	2295	3060	3825



b. První člen posloupnosti je $U_1 = 765$. Každý další člen je o 765 větší než předcházející člen. Jde tedy o aritmetickou posloupnost s prvním členem 765 a s diferencí 765.

c. Posloupnost vyjadřující závislost celkové výše kapitálu na počtu let od uložení vkladu získáme ze vzorce:

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n = 30000 + 30000 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}03 \cdot \frac{360}{360} \cdot n = K_0 + U_n = 30000 + 765 \cdot n$$

Jde tedy o aritmetickou posloupnost s prvním členem 30 765 a s diferencí 765.

6) Pan Bedřich si půjčil 180 000 Kč dne 22. února 2012 při roční úrokové míře 12 %. Který den musel zaplatit dluh, jestliže se s bankou vyrovnal částkou 195 000 Kč?

$K_0 = 180000\,Kč$

$i = 0{,}12$

$K_n = 195000\ Kč$

$n = 1$

$\underline{k = 1}$

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n$$

Odtud vyjádříme t:

$$K_n - K_0 = K_0 \cdot k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n$$

$$\frac{t}{360} = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot k \cdot i \cdot n}$$

$$t = \frac{360 \cdot (K_n - K_0)}{K_0 \cdot k \cdot i \cdot n}$$

$$t = \frac{360 \cdot (195000 - 180000)}{180000 \cdot 1 \cdot 0{,}12 \cdot 1} = 250$$

Pan Bedřich musel zaplatit dluh po 250 dnech. Při využití standardu 30E/360, tedy pokud počítáme, že jeden měsíc má 30 dnů, jde o $8\frac{1}{3}$ měsíce, tedy o 8 měsíců a deset dnů.

Den zaplacení vypočítáme tak, že nejprve k datu vypůjčení přičteme 8 měsíců, tedy získáme 22. 10. 2012. Do konce října nám zbývá 8 dnů. Chybí přičíst ještě dva dny a získáme tak datum 2. 11. 2012.

Pan Bedřich musel zaplatit dluh dne 2. 11. 2012.

<u>Úlohy k procvičení:</u>

1. Paní Dvořáková zakoupila dluhopis za 20 000 Kč s dobou splatnosti 5 let s úrokovou mírou 3,2 %. Po uplynutí každého roku (po dobu pěti let) bude dostávat vždy úrok z částky 20 000 Kč. Daň z úroku je 15 %. Po pěti letech obdrží s úrokem i vloženou částku. Vypočítejte:
    a. Úrok za jeden rok před zdaněním.
    b. Úrok za jeden rok po zdanění.
    c. Čistý výnos z dluhopisu.

[a. 640 Kč, b. 544 Kč, c. 2 720 Kč]

2. Pan Král splatil úvěr a úroky částkou 445 000 Kč. Půjčka byla splacena po devíti měsících, a to při ročním úroku 15 %. Jak velký úvěr si vzal pan Král?

[400 000 Kč]

3. Vypočítejte úrok, který vynese jistina 24 000 Kč při roční úrokové míře 5 % za tři měsíce? Daň z úroku je 15 %.

[255 Kč]

4. Pan Beránek si chce od banky půjčit peníze na nový počítač. Dluh bude moci splatit za 4 měsíce, kdy bude mít k dispozici 30 000 Kč. Banka mu je ochotna poskytnout úvěr s úrokovou mírou 15 %, úročí v den splatnosti a půjčuje cele stokoruny. Kolik si může pan Beránek maximálně půjčit?

[28 500 Kč]

5. Vklad 10 000 Kč je úročen jedenkrát ročně s úrokovou mírou 2 %, jde o jednoduché úročení. Ověřte, že posloupnosti, které vyjadřují závislost celkové výše úroku po zdanění na počtu let od uložení vkladu pro následující případy výše daně z úroku u_1 – u_4, jsou aritmetické (určete první člen a diferenci): u_1=0 %; u_2=15 %; u_3=20 %; u_4=25%.

[u_1=0 %: 200; 200; u_2= 15%: 170; 170; u_3= 20%: 160; 160; u_4= 25%: 150; 150]

Použité zdroje a literatura:

ODVÁRKO, Oldřich.: *Matematika pro gymnázia- Posloupnosti a řady*. 1 vydání. Praha: Prométheus, 1995. ISBN 80-85849-91-7.

ODVÁRKO, Oldřich. *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. 1. vydání.* Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-303-8.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.