INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

SLOVNÍ ÚLOHY VEDOUCÍ K ŘEŠENÍ KVADRATICKÝCH ROVNIC

Autor	Hana Macholová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	14. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá řešení kvadratických rovnic a umí je aplikovat při řešení slovních úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené úlohy:

1. Vodní nádrž je možno plnit třemi přívody. Druhým by se plnila o polovinu delší dobu než prvním, třetím pak o osm hodin déle než prvním. Všemi třemi přívody současně se naplní za 4,5 hodiny. Za jakou dobu by se naplnila jednotlivými přívody.

Oba přívody ………………… 4,5 hodiny => za 1 hodinu $\frac{1}{4{,}5}=\frac{2}{9}$ nádrže

První přívod………………….. x hodin => za 1 hodinu $\frac{1}{x}$ nádrže

Druhý přívod………………… (1,5 x) hodin => za 1 hodinu $\frac{1}{\frac{3}{2}x}=\frac{2}{3x}$ nádrže

Třetí přívod………………….. (x+8) hodin => za hodinu $\frac{1}{x+8}$ nádrže

Část napuštěná všemi přívody za 1 hodinu = součtu částí napuštěných jednotlivými přívody:

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}+\frac{1}{x+8} \quad \Big/ \cdot 9\cdot x\cdot(x+8)$$

$$2\left(x^2+8x\right)=9(x+8)+6(x+8)+9x$$

$$2x^2+16x=9x+72+6x+48+9x$$

$$2x^2-8x-120=0$$

$$x^2-4x-60=0$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-20)}}{2\cdot1}=\frac{4\pm16}{2}\Rightarrow x_1=10;\ x_2=-6$$ (nesmí být záporný, jde o čas)

První přívod: x = 10 hodin
Druhý přívod: 1,5x = 15 hodin
Třetí přívod: (x+8) =18 hodin

Zkoušku provedeme tak, že ověříme, zda čísla 10, 15 a 18 jako číselné hodnoty časů, za něž se naplní nádrž jednotlivými přívody, vyhovují všem podmínkám úlohy.
Doba napouštění druhým přívodem je zřejmě o polovinu delší než doba napouštění prvním přívodem: $15=1{,}5\cdot10$ (platí).
Doba napouštění třetím přívodem je o osm hodin delší doba napouštění prvním přívodem: $18=10+8$ (platí).
Všemi třemi přívody současně se naplní za 4,5 hodiny:

$$\frac{4{,}5}{10}+\frac{4{,}5}{15}+\frac{4{,}5}{18}=1$$

$1215+810+675=2700$ (platí).

$$2700=2700$$

Prvním přívodem se bazén naplní za 10 hodin, druhým za 15 hodin a třetím za 18 hodin.

2. Pokud se rychlost vlaku zvýší o 9 kmh^{-1}, urazí dráhu 180 km o 40 minut dříve než při původní rychlosti. Vypočítejte čas, za který by vlak ujel tuto dráhu při původní rychlosti.

Původní rychlost .... v_1 kmh^{-1}
Původní čas .... t_1 hodin
Rychlost po zrychlení .... v_2 kmh^{-1}
Čas po zrychlení .... t_2 hodin
Dráha..................................... $s_1 = s_2 = 180$ km

Platí: $t_2 = t_1 - \frac{2}{3}$

$$v_2 = v_1 + 9$$

$$s_1 = v_1 t_1$$

$$180 = v_1 t_1 \Rightarrow v_1 = \frac{180}{t_1}$$

$$s_2 = v_2 t_2 = (v_1 + 9)\left(t_1 - \frac{2}{3}\right) = 180$$

Do rovnice $(v_1 + 9)\left(t_1 - \frac{2}{3}\right) = 180$ dosadíme $v_1 = \frac{180}{t_1}$

$$\left(\frac{180}{t_1} + 9\right)\left(t_1 - \frac{2}{3}\right) = 180$$

$$180 - \frac{360}{3t_1} + 9t_1 - 6 = 180 \quad / \cdot t_1$$

$$180t_1 - 120 + 9t_1^2 - 6t_1 = 180t_1$$

$$9t_1^2 - 6t_1 - 120 = 0 \quad / \cdot \frac{1}{3}$$

$$3t_1^2 - 2t_1 - 40 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 3 \cdot (-40)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{484}}{6} \Rightarrow t_1 = 4; \quad t_2 = -\frac{10}{3}$$

t_2 vyloučíme, protože čas nemůže vyjít jako záporné číslo.

Ověříme, zda jsou splněny všechny podmínky slovní úlohy:

Došlo ke zvýšení rychlosti o 9 kmh^{-1}: $v_1 = \frac{180}{t_1} = \frac{180}{4} = 45$; $v_2 = \frac{180}{t_1 - \frac{2}{3}} = \frac{180}{\frac{10}{3}} = 54$

$$\begin{array}{l} v_2 = v_1 + 9 \\ 54 = 45 + 9 \end{array} \quad \text{(platí).}$$

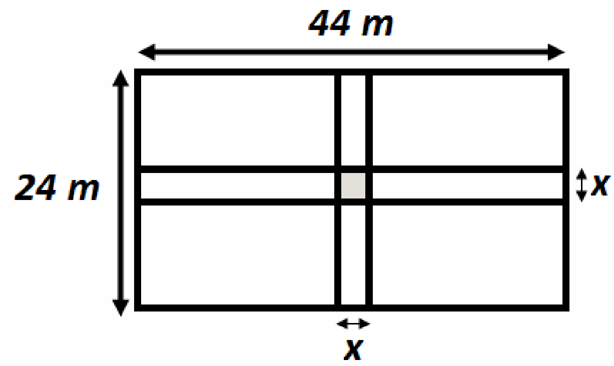
Vlak urazí dráhu 180 km o 40 minut dříve než při původní rychlosti.

Původně ujede dráhu 180 km za $t_1 = 4$ hod, po zrychlení za $t_2 = \frac{180}{54} = \frac{10}{3}$ hod, což je o $\frac{2}{3}$ hod méně, tedy dráhu urazí o 40 minut dříve.

Při původní rychlosti by vlak urazil dráhu 180 km za 4 hodiny.

3. Pozemek má tvar obdélníku o rozměrech 24 m a 44 m a je rozdělen dvěma navzájem kolmými cestami o stejné šířce, jež jsou rovnoběžné se stranami pozemku. Zbývající část pozemku je zahrada, jež zabírá $\frac{7}{8}$ rozlohy celého pozemku. Jak široké jsou cesty?

Řešení:



Plocha pozemku se vypočítá pomocí vzorce pro obsah obdélníku:

$S = a \cdot b = 24 \cdot 44 = 1056$

$S = 1056\,\text{m}^2$

Plocha zahrady je $\frac{7}{8}$ plochy pozemku ($\frac{7}{8} \cdot 1056)$, tedy 924 m.

Plocha, kterou zabírají je zbývající $\frac{1}{8}$ pozemku, tedy 132 m^2.

Plocha jednotlivých cest se vypočítá: $S_1 = x \cdot 24$, $S_2 = x \cdot 44$

Pokud bychom pouze sečetli plochy jednotlivých cest, malý čtverec (vyznačený v obrázku šedě) bychom počítali dvakrát, a proto jeho obsah musíme od součtu odečíst a výsledek nám musí dát 132 m^2.

Platí tedy:

$S_1 + S_2 - x^2 = 132$

$x \cdot 24 + x \cdot 44 - x^2 = 132$

$x^2 - 68x - 132 = 0$

$x_{1,2} = \frac{68 \pm \sqrt{68^2 - 4 \cdot 1 \cdot 132}}{2 \cdot 1} = \frac{68 \pm 64}{2} \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 65$

Kořen x_2 vyloučíme, protože šířka cesty nemůže být větší než šířka celého pozemku.
Řešením je tedy kořen $x_1 = 2$ m.

Ověříme, zda jsou splněny všechny podmínky slovní úlohy:

Plocha zahrady zabírá $\frac{7}{8}$ rozlohy celého pozemku. Plocha celého pozemku je $S = 1056$ m^2. Cesta zabere $S_c = (2 \cdot 24 + 2 \cdot 44 - 2 \cdot 2)\,\text{m}^2 = 132\,\text{m}^2$. Na zahradu zbývá tedy $S_z = (1056 - 132)\,\text{m}^2 = 924\,\text{m}^2$.

$1056 \cdot \frac{7}{8} = 924$ (platí tedy, že plocha zahrady je $\frac{7}{8}$ rozlohy celého pozemku).

Cesty jsou široké 2 metry.

4. Najdi dvojciferné číslo, pro které platí:
   Ciferný součet je 9.
   Pokud vyměníme obě číslice, vznikne číslo, jež po vynásobení původním číslem dá součin 2430.

Číslo zapíšeme ve tvaru $xy \Rightarrow$ jeho hodnota je $xy = 10x + y$.
Pokud vyměníme obě číslice, vznikne číslo ve tvaru $yx \Rightarrow$ jeho hodnota je $yx = 10y + x$.
Součin výše uvedených čísel je $2430 \Rightarrow$ získáváme rovnici: $(10x + y) \cdot (10y + x) = 2430$, tu lze ještě upravit na rovnici $\underline{101xy + 10x^2 + 10y^2 = 2430}$ (*)

Ciferný součet je $9 \Rightarrow x + y = 9 \Rightarrow x = 9 - y$ dosadíme do rovnice (*) a získáme rovnici:

$$101(9 - y)y + 10(9 - y)^2 + 10y^2 = 2430$$
$$(909 - 101)y + 10(81 - 18y - y^2) + 10y^2 = 2430$$
$$-81y^2 + 729y - 1620 = 0 \quad / \cdot \left(-\frac{1}{81}\right)$$

$$y^2 - 9y + 20 = 0$$
$$(y - 4)(y - 5) = 0$$
$$\Rightarrow y_1 = 4 \quad x_1 = 9 - y = 5$$
$$\Rightarrow y_2 = 5 \quad x_2 = 9 - y = 4$$

Ověříme, zda jsou splněny všechny podmínky slovní úlohy:

Ciferný součet je 9 : 4+5=9; 5+4=9 (platí).
Pokud vyměníme obě číslice, vznikne číslo, jež po vynásobení původním číslem dá součin 2430: $45 \cdot 54 = 2430$

Původní číslo je 45 nebo 54.

Úlohy k procvičení:

1. Petr a Adam se chtějí dostat z místa A do místa B. Polní cesta mezi oběma místy je dlouhá 600 metrů, přímá vzdálenost terénem je 480 metrů. Oba chlapci vybíhají současně. Petr běží po polní cestě a dostane se do místa B o 10 s dříve než Adam, jenž běží terénem průměrnou rychlostí o $1ms^{-1}$ menší, než je Petrova průměrná rychlost. Určete průměrnou rychlost obou chlapců.

   [Rychlost Adama 3 ms^{-1}, rychlost Petra $4ms^{-1}$.]

2. Z míst A, B, jež jsou od sebe vzdáleny 54 km, vyjeli proti sobě současně dva cyklisté, Potkali se za dvě hodiny. Oba jeli dále, aniž by se zastavili. Cyklista, který jel z místa A, dojel do místa B o 54 minut dříve, než druhý cyklista, jenž jel z místa B, dorazil do místa A. Určete rychlost obou cyklistů.

   [15 kmh^{-1}, 12 kmh^{-1}.]

3. Poměr délky a šířky obdélníku je 5:3. Jestliže zkrátíme délku obdélníku o 5 cm a šířku prodloužíme na dvojnásobek, zvětší se obsah o 45 cm^2. Určete rozměry obdélníku.

   [15 cm, 9 cm]

4. Dvojciferné číslo má druhou číslici (zleva) o dvě menší než první. Pokud vynásobíme dané číslo jeho ciferným součtem, dostaneme 1204. Určete toto číslo.

   [86]

5. Ze stanice má být vypraveno 11 vlaků, z nichž každý má mít po 35 vagónech. Aby se ušetřilo několik lokomotiv, byl zmenšen počet vlaků tím, že ke každému vlaku se přidalo tolikrát po pěti vagónech, kolik lokomotiv bylo ušetřeno. Tak byly opět vypraveny všechny vagóny. Kolik lokomotiv se ušetřilo a kolik vagónů měl pak každý vlak?

   [4 lokomotivy, 55 vagónů]

6. Dva traktory zorají pole za 4 hodiny. Kdyby první traktor zoral polovinu pole a druhý traktor práci dokončil, trvala by orba 9 hodin. Za kolik hodin zorá pole každý traktor zvlášť?

   [12 h, 6 h]

7. Vodní nádrž se naplní jedním přívodem o 4 hodiny a druhým o 9 hodin později, než kdyby se plnila oběma přívody najednou. Za jakou dobu se naplní každým přívodem zvlášť?

   [10 h, 15 h]

8. V obvodu, v němž jsou zapojeny paralelně dva rezistory, prochází při napětí 24 V proud 4 A. Pokud tyto rezistory zapojíme sériově, klesne proud na 0,75 A. Určete odpory obou rezistorů.

   [24 Ω, 8 Ω]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

CHARVÁT, Jura a KOL. *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-362-2.

JANEČEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. 4. vydání. Praha: Prométheus, 2005. ISBN 80-7196-076-4.

KOVÁČIK, Jan. *Řešené příklady z matematiky pro střední školy*. 1 vydání. Praha: ASPI Publishing, 2001. ISBN 80-7357-005-X.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.