INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt
ŠABLONY NA GVM
Gymnázium Velké Meziříčí
registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

DERIVACE FUNKCE (TÉŽ URČENÉ IMPLICITNĚ), GEOMETRICKÝ A FYZIKÁLNÍ VÝZNAM

Autor	Iva Kašparová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	11. 1. 2014
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem derivace funkce, počítá derivace pomocí vzorců, zná geometrický význam derivace a vše umí aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

DERIVACE FUNKCE (TÉŽ URČENÉ IMPLICITNĚ), GEOMETRICKÝ VÝZNAM

Příklad 1

Podle vzorců pro derivování elementárních funkcí derivujte:

$$a)\ y = 7x^5 - 2x^4 + 5x^2 - 11x + 6$$

$$b)\ y = tg\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c)\ y = \frac{1}{\left(3x^4 + x^2\right)^{10}}$$

$$d)\ y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$e)\ y = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$

$$f)\ y = \sqrt{x} \cdot (2x^2 + 3x + 5)$$

Řešení:

a) Pomocí vzorce pro derivaci mocniny dostaneme:

$$y\,' = 7 \cdot 5x^4 - 2 \cdot 4x^3 + 5 \cdot 2x - 11 = 35x^4 - 8x^3 + 10x - 11$$

b) Pomocí vzorce pro derivaci funkce tangens a derivaci složené funkce dostaneme:

$$y\,' = \frac{1}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot 3 = \frac{3}{\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

c) Nejprve upravíme: $y = \frac{1}{\left(3x^4 + x^2\right)^{10}} = \left(3x^4 + x^2\right)^{-10}$.

Pomocí vzorce pro derivaci mocniny a derivaci složené funkce dostaneme:

$$y\,' = -10 \cdot \left(3x^4 + x^2\right)^{-11} \cdot \left(12x^3 + 2x\right) = \frac{-120x^3 - 20x}{\left(3x^4 + x^2\right)^{11}} = \frac{-20x \cdot \left(6x^2 + 1\right)}{\left(3x^4 + x^2\right)^{11}}.$$

d) Pomocí vzorců pro derivaci funkce sinus a kosinus a derivaci podílu dostaneme:

$$y\,' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{\left(\cos x \sin x - \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x \cos x\right) - \left(\sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x + \cos x \sin x\right)}{(\sin x - \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{-2}{1 - \sin 2x}$$

e) *Nejprve upravíme* $y = \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} =$

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)\cdot(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} = \cos x + \sin x$$

Pomocí vzorců pro derivaci funkce sinus a kosinus dostaneme:

$$y\,' = \cos x - \sin x\,.$$

f) *Nejprve upravíme* $y = \sqrt{x}\cdot(2x^2 + 3x + 5) = x^{\frac{1}{2}}\left(2x^2 + 3x + 5\right) = 2x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}}$

Pomocí vzorců pro derivaci mocniny dostaneme:

$$y\,' = 5x^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{10x\sqrt{x}\sqrt{x} + 9\sqrt{x}\sqrt{x} + 5}{2\sqrt{x}} = \frac{10x^2 + 9x + 5}{2\sqrt{x}}\ .$$

<u>GEOMETRICKÝ VÝZNAM DERIVACE</u>

Příklad 2

Je dána parabola: $y = x^2 - 4x + 3$

a) Určete dotykový bod a rovnici tečny paraboly, která má směrový úhel 45^{o}.

b) Pomocí derivace určete vrchol paraboly.

Řešení:

a) Tečna má směrový úhel 45^{o} $\Rightarrow$ tg45^{o} = 1 = k (směrnice tečny).

Derivace funkce, kterou je dána parabola je $y\,' = 2x - 4$.

Platí tedy pro bod dotyku: 2x_0 - 4 = 1 $\Rightarrow$ x_0=$\dfrac{5}{2}$*, dopočítáme*

y_0 = $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 4\cdot\dfrac{5}{2} + 3 = \dfrac{-3}{4}$ $\Rightarrow$ ***dotykový bod T*** $\left[\dfrac{5}{2}, \dfrac{-3}{4}\right]$.

Rovnice tečny tedy je:

t: $y + \dfrac{3}{4} = 1\cdot\left(x - \dfrac{5}{2}\right)$ *tj.* $x - y - \dfrac{13}{4} = 0$.

b) Vrchol paraboly je bod, ve kterém je tečna rovnoběžná s osou x a platí tedy, že její směrový úhel je 0^{o}.

tg 0^{o} = 0 = k (směrnice tečny)

Pro vrchol (bod dotyku) tedy platí: 2x_0 - 4 = 0 $\Rightarrow$ x_0 = 2, y_0 = -1.

Vrchol má souřadnice V[2;-1].

DERIVACE FUNKCÍ URČENÝCH IMPLICITNĚ

Příklad 3

1) **Určete rovnici tečny ke kuželosečce v bodě T:**

$$a)x^2 + 2y^2 = 4, T\left[\sqrt{2};1\right]$$
$$b)y^2 - 2x^2 = 16, T[0;4]$$

Řešení:
Funkce jsou zadány implicitně, nebudeme tedy vyjadřovat y, ale derivujeme, kdy $f_{(x)}$=y je složená funkce, platí tedy:

a)

$$2x + 4yy\,´ = 0$$
$$y\,´ = \frac{-x}{2y} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} = k$$

Rovnice tečny tedy je *t:* $y - 1 = \frac{-\sqrt{2}}{2}\left(x - \sqrt{2}\right)$

b)

$$2yy\,´ - 4x = 0$$
$$y\,´ = \frac{4x}{2y} = 0 = k$$

Rovnice tečny tedy je *t:* $y - 4 = 0$.

Úlohy k procvičení:

1) Derivujte pomocí vzorců pro derivace:

$$a) y = xe^x x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2$$
$$b) y = e^{x^2-2x+1}$$
$$c) y = \ln^3\left(x^2-1\right)$$
$$d) y = \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

[$a) y' = e^x(x+1), b) y' = 2(x-1)e^{x^2-2x+1}, c) y' = \frac{6x\ln^2\left(x^2-1\right)}{x^2-1}, d) y' = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$ *]*

2) Je dána parabola: $y = 0{,}5x^2 + 3x + 1$

a) Určete dotykový bod a rovnici tečny paraboly, která má směrový úhel 60°.
b) Určete rovnici tečny paraboly v bodě T[-2;?].

[$a) T\left[\sqrt{3}-3;-2\right], t: y+2 = \sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}+3\right) b) T\left[-2;-3\right], t: y+3 = x+2$ *].*

3) Určete rovnici tečny ke kuželosečce v bodě T a vypočítejte její směrový úhel.

$$a) 4x^2 + y^2 16, T\left[\sqrt{3};2\right]$$
$$b) x^2 = 4y+5, T[3;1]$$
$$c) y^2 = 2(x-1), T[9;4]$$

$$\begin{bmatrix} a) y-2 = -2\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right), \alpha = 106°06' \; b) y-1 = \frac{3}{2}(x-3) \alpha = 56°19', \\ c) y-4 = \frac{1}{4}(x-9), \alpha = 14°02' \end{bmatrix}$$

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Diferenciální a integrální počet*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.