Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

KRUŽNICE, KRUH, KULOVÁ PLOCHA, KOULE

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	4. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí analyticky vyjádřit kružnici, kruh, kulovou plochu a kouli; zná vzájemnou polohu kružnice a přímky, kulové plochy a roviny; umí určit tečnu kružnice; vztahy umí aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Ukažte, že přímka *p* procházející společnými body kružnic *k* a *l* je kolmá na přímku *s* proloženou středy obou kružnic. $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 25 = 0}$; $\boldsymbol{l}$: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 10x - 20y + 25 = 0}$

Řešení:

Obecné rovnice obou kružnic upravíme na středový tvar a určíme souřadnice jejich středů:

k: $x^2 + y^2 = 25 \implies S_1[0; 0]$

l: $(x-5)^2 - 25 + (y-10)^2 - 100 + 25 = 0$

$(x-5)^2 + (y-10)^2 = 100 \Rightarrow S_2[5; 10]$

Určíme souřadnice směrového vektoru přímky s: $S_2 - S_1 = (5; 10) \sim (1; 2)$

Společné body obou kružnic najdeme, řešíme-li soustavu rovnic:

$\mathrm{x^2 + y^2 - 25 = 0}$ *druhou rovnici odečteme od první*

$\underline{\mathrm{x^2 + y^2 - 10x - 20y + 25 = 0}}$

$\mathrm{10x + 20y - 50 = 0}$

$\underline{\mathrm{x + 2y - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 - 2y}}$ *dosadíme za x do první rovnice soustavy*

$\mathrm{(5 - 2y)^2 + y^2 - 25 = 0}$

$\mathrm{25 - 20y + 4y^2 + y^2 - 25 = 0}$

$\mathrm{5y(y - 4) = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \quad y_2 = 4}$ *ke každému y dopočítáme xa zapíšeme společné body obou kružnic*

$A[5; 0] \quad B[-3; 4]$

Určíme souřadnice směrového vektoru přímky p: $B - A = (-8; 4) \sim (-2; 1)$

Jsou-li přímky p a s kolmé, musí být skalární součin jejich směrových vektorů roven 0.

$(1; 2) \cdot (-2; 1) = -2 + 2 = 0$

---

2) Určete tečnu kružnice$\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 10y - 66 = 0}$**, která je kolmá k přímce *p: 4x – 3y + 12 = 0.***

Řešení:

$t \perp p \Rightarrow \overrightarrow{n_t} = (3; 4) \Rightarrow t: 3x + 4y + c = 0$

Aby přímka t byla tečnou, musí mít od ní střed kružnice vzdálenost rovnou poloměru kružnice. Určíme tedy souřadnice středu kružnice a její poloměr $\Rightarrow$ *obecnou rovnici kružnice převedeme na středový tvar.*

$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 66 = 0 \to (x-3)^2 - 9 + (y+5)^2 - 25 - 66 = 0 \to$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 100 \Rightarrow S[3; -5], r = 10$$

Použijeme vztah pro určení vzdálenosti bodu od přímky:

$$|St| = 10 \Rightarrow \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot (-5) + c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 10 \to \frac{|c - 11|}{5} = 10 \to |c - 11| = 50$$

Poslední rovnice má dvě možná řešení:

$c_1 - 11 = 50 \Rightarrow c_1 = 61$ $\qquad$ $c_2 - 11 = -50 \Rightarrow c_2 = -39$

Existují tedy dvě tečny:

$t_1: 3x + 4y + 61 = 0$ $\qquad$ $t_2: 3x + 4y - 39 = 0$

---

3) Určete průnik koule $\boldsymbol{K}$: $(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{z}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}} \leq \mathbf{21}$ se souřadnicovou osou *y*.

Řešení:

Průnikem koule s osou y je úsečka AB, jejíž krajní body jsou průsečíky osy y a příslušné kulové plochy.

Body A, B leží na ose y $\Rightarrow A[0;\ y_1; 0], B[0;\ y_2; 0]$

Body A, B leží na kulové ploše $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 21$

$(y-3)^2 = 16$ $\qquad$ *rovnici odmocníme*

$|y-3| = 4$ $\qquad$ *rovnice má dvě možná řešení*

$y_1 - 3 = 4 \Rightarrow y_1 = 7 \ \ a \ \ y_2 - 3 = -4 \Rightarrow y_2 = -1$

Zapíšeme souřadnice bodů A, B a určíme parametrické vyjádření úsečky AB.

$A[0;\ 7; 0], B[0;\ -1; 0]$

AB: $x = 0$

$\quad y = 7 - 8t$

$\quad z = 0, t \in \langle 0; 1 \rangle$

---

4) Napište rovnici kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadné a dotýká se přímek $\boldsymbol{p}$: $\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} - \mathbf{8} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{q}$: $\mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{13} = \mathbf{0}$.

Řešení:

Rovnici kružnice budeme hledat ve tvaru $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$*, tedy musíme určit m, n, r. Sestavíme soustavu rovnic:*

$P[0; 0] \in k \Rightarrow m^2 + n^2 = r^2$

$$|Sp| = r \Rightarrow \frac{|2m - 3n - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = r$$

$$|Sq| = r \Rightarrow \frac{|3m - 2n - 13|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = r$$

Porovnáním levých stran 2. a 3. rovnice soustavy získáme:

$|2m - 3n - 8| = |3m - 2n - 13|$

Při řešení nastanou dvě možnosti:

$2m - 3n - 8 = 3m - 2n - 13$ $\qquad$ *nebo* $\qquad$ $2m - 3n - 8 = -3m + 2n + 13$

$m = 5 - n$ $\qquad$ *nebo* $\qquad$ $m = \dfrac{21 + 5n}{5}$

Dosadíme do 2. rovnice soustavy, upravíme a získáme:

$r = \frac{|2-5n|}{\sqrt{13}}$ *nebo* $r = \frac{|2-5n|}{5\sqrt{13}}$

Vyjádření pro m a r dosadíme do 1. rovnice soustavy:

$$25 - 10n + n^2 + n^2 = \frac{4 - 20n + 25n^2}{13}$$

$$nebo \quad \frac{441 + 210n + 25n^2}{25} + n^2 = \frac{4 - 20n + 25n^2}{25 \cdot 13}$$

Postupnými ekvivalentními úpravami dospějeme ke kvadratickým rovnicím:

$n^2 - 110n + 321 = 0$ *nebo* $625n^2 + 2750n + 5729 = 0$

Druhá z uvedených kvadratických rovnic má záporný diskriminant, tedy nemá řešení.

První kvadratická rovnice má dva kořeny, ke každému z nich dopočítáme m a r sestavíme rovnici kružnice.

① $n_1 = 107;\ m_1 = -102;\ r_1 = 41\sqrt{13} \ \Rightarrow\ k_1: (x+102)^2 + (y-107)^2 = 21853$

② $n_2 = 3;\ m_2 = 2;\ r_2 = \sqrt{13} \ \Rightarrow\ k_2: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$

<u>Příklady k procvičování:</u>

1) Určete rovnici přímky, která na kružnici *k:* $x^2 + y^2 - 25 = 0$ vytíná tětivu, jejímž středem je bod $P[2;\ -1]$.
(správné řešení: $2x - y - 5 = 0$)

2) Najděte obecnou rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC: $A[1;\ -1], B[7; 7], C[11;\ -1]$.
(správné řešení: $x^2 + y^2 - 12x - 3y + 7 = 0$)

3) Rozhodněte o vzájemné poloze kružnice *k:* $x^2 + y^2 - 25 = 0$ a přímky *p:* $3x + 4y + 25 = 0$. Pokud existují společné body, určete jejich souřadnice.
(správné řešení: tečna kružnice v bodě $T[-3;\ -4]$)

4) Najděte velikost úhlu sevřeného poloměry kružnice $k: x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$, které jsou vedeny body, v nichž souřadnicová osa *x* protíná kružnici *k*.
(správné řešení: 90°)

5) Napište rovnici tečny ke kružnici $k: x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$ v dotykovém bodě $T[3; ?]$.
(správné řešení: $y - 5 - \sqrt{5} = 0 \ a \ y - 5 + \sqrt{5} = 0$)

6) Najděte rovnici kružnice, která se dotýká obou souřadnicových os a prochází bodem $A[2;\ 4]$.
(správné řešení: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4 \ a \ (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$)

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie*. 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.

KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.

BUŠEK, Ivan, Božena MANNOVÁ, Jaroslav ŠEDIVÝ a Beloslav RIEČAN. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vyd. Praha: SPN, 1987.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.