Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ANALYTICKÁ GEOMETRIE ROVINY, POLOHOVÉ VZTAHY ROVIN A PŘÍMEK

Autor	Iva Kašparová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	21. 9. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá přímky a roviny vyjádřit obecnou rovnicí i parametricky, umí určit jejich vzájemnou polohu v prostoru a umí vše aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

ANALYTICKÁ GEOMETRIE ROVINY, POLOHOVÉ VZTAHY ROVIN A PŘÍMEK

Příklad 1

Napište obecnou rovnici roviny ABC, je-li : $A[1;1;4], B[-1;2;1], C[0;-1;0]$**. Zjistěte, zda bod** $M[1;2;3]$ **leží v rovině ABC. Dále určete** d_2 **souřadnici bodu** $D[1;d_2;5]$ **tak, aby bod D ležel v rovině ABC.**

Řešení:

Určíme směrové vektory roviny ABC:

$\vec{u} = B - A = (-2;1;-3) = (2;-1;3), \vec{v} = C - A = (-1;-2;-4) = (1;2;4)$

Určíme normálový vektor roviny ABC jako vektorový součin obou vektorů směrových:

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1) = (2;1;-1)$

Určíme obecnou rovnici roviny ABC dosazením normálového vektoru:

2x + y - z + d = 0

Dosadíme souřadnice libovolného body roviny ABC, např. bod A:

2.1 + 1.1 - 4 + d = 0

d = 1

Obecná rovnice roviny ABC tedy je:

2x + y - z + 1 = 0

Za x, y, z dosadíme souřadnice bodu M a zjistíme, zda dostaneme platnou rovnost:

2.1 + 2 - 3 + 1 = 0

2≠0 ⇒ ***M*** $\notin$ ***ABC****.*

Dosazením bodu D dostaneme:

2.1 + d_2 *- 5 + 1 = 0*

d_2 ***= 2.***

Příklad 2

Je dána rovina α: 2x + 3y - z - 6 = 0 a přímka p: x = 1 - t, y = 2 + 2t, z = 4 + 3t, kde tϵR. Určete vzájemnou polohu přímky a roviny, jsou-li různoběžné, určete průsečík.

Řešení:

Normálový vektor rovin α má souřadnice $\vec{n} = (2;3;-1)$*, směrový vektor přímky p* $\vec{u} = (-1;2;3)$*. Skalární součin* $\vec{u}.\vec{n} = 2.(-1) + 3.2 + (-1).3 = 1$ *není roven 0, tzn., že vektory nejsou kolmé, proto* ***je přímka p různoběžná s rovinou α a hledáme tedy průsečík****.*

Dosazením parametrického vyjádření přímky do obecné rovnice roviny dostaneme:

2 - 2t + 6 + 6t - 4 - 3t - 6 = 0 $\Rightarrow$ *t = 2*

Dosazením zpět do rovnice p tak ***dostaneme průsečík*** $P[-1;6;10]$

Příklad 3

Určete vzájemnou polohu rovin α a β.

a) **α: 2x - 5y + 4z -10 = 0, β: 4x - 10y + 8z -10 = 0**
b) **α: 2x - 5y + 4z -10 = 0, β: x - y - z - 2 = 0**

Řešení:

a) *Souřadnice normálových vektorů jsou:*
   $n_\alpha = (2;-5;4), n_\beta = (4;-10;8) = (2;-5;4) \Rightarrow n_\alpha = n_\beta \Rightarrow$ ***α//β.***
   Zjistíme, zda jsou α a β také totožné, tedy určíme, zda existuje společný bod obou rovin. Řešíme tedy soustavu rovnic:

2x - 5y + 4z -10 = 0

4x - 10y + 8z -10 = 0

dostaneme: 10 = 0, tzn., takový bod neexistuje$\Rightarrow$ ***α a β jsou rovnoběžné různé roviny.***

b) $n_\alpha = (2;-5;4), n_\beta = (1;-1;-1)$ $\Rightarrow$ $n_\alpha \neq k n_\beta$ $\Rightarrow$ ***α a β jsou různoběžné roviny ⇒ určíme průsečnici.***

V soustavě rovnic

2x - 5y + 4z -10 = 0

x - y - z - 2 = 0

Zvolíme parametr z = t a vyjádříme x a y. Dostaneme:

x = 3t, y = -2 - 2t, z = t, což je parametrické vyjádření průsečnice rovin α a β.

Úlohy k procvičení:

1) Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body $A[2;4;7], B[1;6;0]$ a je rovnoběžná s přímkou CD, $C[3;1;5], D[-1;0;4]$.

   [x - 3y - z + 17 = 0].

2) Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny α:
   a) p: x = 1 - t, y = t, z = 2 - 3t, t∈R a α: -x + 2y + z - 1 = 0
   b) p(P, $\vec{u}$), $P[2;0;0], \vec{u} = (-1;3;1)$, α: x + y - z = 4
   c) p = AB, $A[2;1;0], b[5;-3;2]$, α: 2x + y - z = 0.

   [a) p⊂α, b) p je různoběžná s α a P[0;6;2], c) p‖α]

3) Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem M a je rovnoběžná s rovinou α.

   M[1;1;0], α: x - y - 1 = 0

   [x - y = 0].

4) Určete hodnotu parametru a, b ∈ R tak, aby přímka

   p = {[a - t; 1 + bt; 2 - 2t], t∈R} byla s rovinou α: x + 2y - z - 10 = 0
   a) různoběžná
   b) ležela v rovině α
   c) rovnoběžná a neležela v rovině α.

   [a) b≠½, a∈R, b) b=-½ a = 10, c) b=-½ a≠10]

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.