Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ PŘÍMKY

Autor	Iva Kašparová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	2. 6. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá přímky vyjádřit obecnou rovnicí i parametricky, umí určit jejich vzájemnou polohu v rovině i prostoru a umí vše aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

ANALYTICKÁ GEOMETRIE PŘÍMKY

Příklad 1

Body $A[2;4], B[4;-6]$ určují přímku AB. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem MN, kde $M[-4;-3], N[1;-2]$ a je kolmá k přímce AB.

Řešení:

Parametrické vyjádření AB je:

$$\begin{aligned} x &= 2+2t \\ y &= 4-10t, t \in R \end{aligned} \Rightarrow \vec{u}_{AB} = (2;-10) = (1;-5) = n_p$$

$$S_{MN}\left[\frac{-3}{2};\frac{-5}{2}\right]$$

Obecná rovnice přímky, která má normálový vektor (1;-5,) je: x – 5y + c = 0.

$$S_{MN}\left[\frac{-3}{2};\frac{-5}{2}\right] \in p: \quad \frac{-3}{2} - 5.\left(\frac{-5}{2}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -11$$

Rovnice přímky p tedy je: x – 5y -11 = 0.

Příklad 2

Určete vzájemnou polohu přímek p a q:

p:	**q:**
$x = 1-t$ $y = 3+2t, t \in R$	3x – 2y + 1 = 0

Řešení

Parametrické vyjádření přímky p převedeme na obecnou rovnici. Určíme směrový vektor přímky p: $\vec{u} = (-1;2) \Rightarrow \vec{n} = (2;1)$. Normálový vektor přímky q je (3;-2).

(2;1) ∦ k ·(3;-2)⇒ přímky jsou různoběžné a tedy určíme jejich průsečík.

Obecná rovnice přímky s normálovým vektorem (2;1) je: 2x + y +c = 0.

Nalezneme bod přímky p: $C[1;3]$.

$C \in p \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = 5$

Obecná rovnice přímky p tedy je: 2x + y + 5 = 0.

Průsečík přímek je bod, který splňuje obecné rovnice obou přímek tj.:

2x + y + 5 = 0

3x – 2y + 1 = 0

Vyřešíme soustavu rovnic: $x = \frac{-11}{7}, y = \frac{-13}{7}$.

Průsečík přímek p a q je tedy bod P $\left[\frac{-11}{7}; \frac{-13}{7}\right]$.

Příklad 3

Jsou dány body $A[1;4;6;], B[4;1;-3]$:

a) **Napište parametrické vyjádření přímky AB.**
b) **Napište parametrické vyjádření polopřímky BA.**
c) **Napište parametrické vyjádření úsečky AB.**

Řešení:

$$\vec{u}_{AB} = B - A = (3;-3;-9) = (1;-1;-3)$$

a)

$$\leftrightarrow AB:$$
$$x = 1 + t$$
$$y = 4 - t$$
$$z = 6 - 3t, t \in R$$

b)

$$\rightarrow BA:$$
$$x = 4 - t$$
$$y = 1 + t$$
$$z = -3 + 3t, t \in \langle 0; \infty)$$

c)

$$AB:$$
$$x = 1 + t$$
$$y = 4 - t$$
$$z = 6 - 3t, t \in \langle 0;3 \rangle$$

Příklad 4

Jsou dány přímky p = {[m + 2t; 3t; 6 – 4t], tϵR} a q = {[5 + s; 1 – 4s; -4 + s], sϵR }. Určete číslo m tak, aby přímky p a q byly různoběžné a zjistěte jejich průsečík.

Řešení:

Přímky p a q jsou různoběžné právě tehdy, když existují reálná čísla t, s, m tak, že platí:

$$m + 2t = 5 + s$$
$$3t = 1 - 4s$$
$$6 - 4t = -4 + s.$$

Z druhé a třetí rovnice vypočítáme t = 3, s = -2. Dosadíme do první rovnice a dostaneme

m = -3.

Dosadíme vypočtené hodnoty t a m do parametrického vyjádření přímky p (nebo s do parametrického vyjádření q) a dostaneme souřadnice průsečíku ***P[3;9;-6].***

Úlohy k procvičení:

1) Určete vzájemnou polohu přímek p a q. V případě, že jsou různoběžné, určete průsečík.
   a) p: 2x – 6y + 5 = 0
      q: 3x – 9y + 7 = 0
   b) p = {[3 – 2t; 1 + 3t], tϵR }
      q = {[4 + 3r; 7 – 2r], rϵR }
   c) p: 2x + 3y -7 = 0
      q = {[2 + 3t; 1 - 2t], tϵR }
   d) p = {[5 + 3t; 8 - 6t; -6 + 9t], tϵR }
      q = {[7 - 2r; -1 + 4r; -6r], rϵR }
   e) p = {[1 + t; 3 - 2t; -1 + 3t], tϵR }
      q = {[2 + 2r; 5 + 3r; -2 - r], rϵR }
   f) p = {[1 + t; 3 - 2t; -1 + 3t], tϵR }
      q = {[2 + 2r; 5 + 3r; r], rϵR }

   [a) rovnoběžné různé, b) různoběžné P[-5;13], c) totožné, d)rovnoběžné různé, e) různoběžné P $\left[\frac{6}{7};\frac{23}{7};-\frac{10}{7}\right]$*, c) mimoběžné].*

2) Body A[2;4], B[4;2], C[4;1] jsou vrcholy trojúhelníku ABC.

   a) Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží výšky v_a, v_b, v_c a vypočítejte souřadnice jejich průsečíku.

   b) Napište obecné rovnice přímek, na nichž leží těžnice t_a, t_b, t_c a vypočítejte souřadnice těžiště.

   [$v_a : y-4=0, v_b : 2x-3y-2=0, v_c : x-y-3=0, V[7;4]$

   $t_a : 5x+4y-26=0, v_b : x+2y-8=0, v_c : 2x+y-9=0, T\left[\frac{10}{3};\frac{7}{3}\right]$ *].*

3) Jsou dány dvě přímky p: ax + (2b - 1)y + c + 3 = 0, q: 2x -(b + 2)y – 2c = 0. Pro které hodnoty a, b, c ϵ R jsou dané přímky
   a) splývající rovnoběžky,
   b) různé rovnoběžky,
   c) dvě různoběžky, které se protínají v bodě P[5;0]?
      [a) a = 2, b = -1/3, c = -1, b) a = 2, b = -1/3, c ≠ -1, c) a = -8/5, b ≠13/6,c = 5].

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.