INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt
ŠABLONY NA GVM
Gymnázium Velké Meziříčí
registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

VEKTOROVÁ ALGEBRA

Autor	Iva Kašparová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	2. 5. 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá operace s vektory, počítá jejich velikost, odchylku, skalární a vektorový součin a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

VEKTOROVÁ ALGEBRA

Vektor je množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou velikost a směr.

$$\vec{u} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (u_1, u_2, u_3)$$

Příklad 1

Jsou dány body A[1;1], B[4;-3], C[7;1], D[4;5].

a) **Dokažte, že body A, B, C,D jsou vrcholy kosočtverce.**
b) **Vypočtěte velikost strany, velikost úhlopříček a velikosti vnitřních úhlů tohoto kosočtverce.**

Řešení:

a) Určíme směrové vektory všech stran kosočtverce:

$$\vec{u} = B - A = (3;-4)$$

$$\vec{v} = C - B = (3;4)$$

$$\vec{w} = D - C = (-3;4)$$

$$\vec{x} = A - D = (-3;-4)$$

*Platí: AB ∥ CD a BC ∥ AD → **jde o rovnoběžník**.*

b) $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |\vec{u}| = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2} = \sqrt{9+16} = 5$

*Jde o kosočtverec s **velikostí strany 5.***

$$|AC| = |C - A| = |(6;0)| = 6$$

$$|BD| = |D - B| = |(0;8)| = 8$$

Úhlopříčky mají délky e=6 a f=8.

$$\cos|\sphericalangle BAD| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{x}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{x}|} = \frac{|-9+16|}{5\cdot 5} = \frac{7}{25} \Rightarrow |\sphericalangle BAD| = 106°16'$$

$$|\sphericalangle ABC| = 180° - 106°16' = 73°44'$$

Vnitřní úhly kosočtverce jsou 106°16' a 73°44'.

Příklad 2

Jsou dány vektory $\vec{a}=(2;3;-1), \vec{b}=(1;-2;3), \vec{c}=(2;-1;1)$**, určete souřadnice vektoru** $\vec{x}$ ***, tak aby platilo:*** $\vec{x}\perp\vec{a}\wedge\vec{x}\perp\vec{b}\wedge\vec{x}.\vec{c}=-6$**.**

Řešení:

$\vec{x}=(x_1;x_2;x_3)$

$\vec{x}\perp\vec{a}\Leftrightarrow\vec{x}.\vec{a}=0\Rightarrow 2x_1+3x_2-x_3=0$ (1)

$\vec{x}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{x}.\vec{b}=0\Rightarrow x_1-2x_2+3x_3=0$ (2)

$\vec{x}.\vec{c}=-6\Rightarrow 2x_1-x_2+x_3=-6$. (3)

Odečtením (1) –(3) dostaneme $4x_2-2x_3=6$ *tj.* $x_2=\dfrac{3+x_3}{2}$. *(4)*

K rovnici (1) přičteme trojnásobek rovnice (3) a získáme

$8x_1+2x_3=-18$ *tj.* $x_1=\dfrac{-9-x_3}{4}$. *(5)*

Vztahy (1) a (5) dosadíme do rovnice (2) a po úpravách dostaneme $x_3=3$.

Z rovnic (4) a (5)po dosazení vypočteme $x_1=-3, x_2=3$.

Podmínkám úlohy tedy vyhovuje vektor $\vec{x}=(-3;3;3)$**.**

Příklad 3

Vektor $\vec{z}=(2;-2;-10)$ **zapište jako lineární kombinaci vektorů** $\vec{u}=(2;1;-1), \vec{v}=(2;3;2), \vec{w}=(4;5;-2)$**.**

Řešení:

Musí platit: $\vec{z}=(2;-2;10)$=k. $(2;1;-1)$+l. $(2;3;2)$+m. $(4;5;-2)$

tj. 2 = 2k + 2l + 4m *(1)*

-2 = k + 3l + 5m *(2)*

-10 = -k + 2l – 2m *(3)*

Sečtením (2) + (3) a vyjádřením m dostaneme $m=\dfrac{-12-5l}{3}$.

Odečtením dvojnásobku (2) od (1) a vyjádřením m dostaneme $m=\dfrac{-4l-6}{6}$.

Porovnáním pak l = -3 a dosazením m = 1 a nakonec k = 2.

Platí tedy: $\vec{z}=2.\vec{u}-3.\vec{v}+\vec{w}$.

Příklad 4

Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, kde A[4;0;-1], B[2;4;-1], C[5;3;4].

Řešení:

Obsah trojúhelníku vypočítáme ze vztahu: $S = \frac{1}{2} \mid \vec{u} \; x \; \vec{v} \mid$

kde $\vec{u}$ *= B-A a* $\vec{v}$ *= C-A, tj.* $\vec{u}$ *= (-2;4;0),* $\vec{v}$ *= (1;3;5).*

$\vec{u}$ *x* $\vec{v}$ = $(u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$

$\vec{u}$ *x* $\vec{v}$ *=(4.5-0.3;0.1-(-2).5;(-2).3-4.1) = (20;10;-10)=(2;1;-1).*

$\mid \vec{u} \; x \; \vec{v} \mid = \sqrt{400+100+100} = \sqrt{600} = 10\sqrt{6}$

Obsah trojúhelníku je $S = \frac{1}{2}.\sqrt{6}$ *.*

Úlohy k procvičení:

1) Jsou dány body K[3;-2], L[-4;5], M[2;1]. Vypočítejte souřadnice bodu N tak, aby KLMN byl rovnoběžník.
   [řešení: N[9;-6]]
2) Jsou dány body A[1;2;3], B[-4;5;6], C[4;3;2].
   a) Dokažte, že body A, B, C tvoří trojúhelník.
   b) Určete reálná čísla m, n, k, p tak, aby body R[0;m;n], S[k;p;6] ležely na přímce AB.
   [řešení: a)např. K – L ≠ k(K - M), b) $R\left[0;\frac{13}{5};\frac{18}{5}\right], S[-4;5;6]$*]*
3) V trojúhelníku ABC vyznačte vektory $\vec{a} = C - B, \vec{b} = A - C, \vec{c} = B - A.$
   a) Dokažte, že platí: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{o}$.
   b) Dokažte, že také: $\vec{t_b} + \vec{t_a} + \vec{t_c} = \vec{o}$.
   [řešení: platí]
4) Vypočítejte velikost úhlů α, β, γ v trojúhelníku ABC, je-li:
   a) A[2;3], B[3;1], C[5;2]
   b) A[1;0;2], B[2;-2;4], C[3;6;1].
   [řešení: a) $\alpha = 45^o$*,* $\beta = 90^o$*,* $\gamma = 45^o$*, b)* $\alpha = 128^o\,40'$*,* $\beta = 35^o\,32'$*,* $\gamma = 15^o\,48'$*].*
5) Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, je-li:
   a) A[4;0;-1], B[2;4;-1], C[5;3;4].
   b) A[3;-6;5], B[4;8;1], C[5;22;-3].
   [řešení: a) S = 1, b) A,B,C leží na jedné přímce].
6) Jsou dány body K[2;3;-1], L[8;4;-2], M[0;6;0], O[2;1;4].
   Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu KLMNOPQR.
   [řešení: V = 108]

Použité zdroje a literatura:

KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*: *Analytická geometrie*. 2. upravené vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-163-9.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.