Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

NEKONEČNÉ GEOMETRICKÉ ŘADY

Autor	Petr Vrána
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	14. prosince 2013
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a úlohy k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá pojem nekonečné geometrické řady a umí jej aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Příklad 1

Zdůvodněte konvergenci nekonečné geometrické řady a potom určete její součet:

$$\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(\sqrt{5}-2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^3+\cdots$$

Řešení

Daná geometrická řada je konvergentní, jestliže její kvocient q splňuje podmínku $|q|<1$. V našem případě je $q=\sqrt{5}-2 \rightarrow |q|<1$, řada je konvergentní a její součet existuje. Protože první člen je $a_1=\sqrt{5}-2$ a kvocient je $q=\sqrt{5}-2$, můžeme psát:

$$\boldsymbol{s}=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\sqrt{5}-2}{1-(\sqrt{5}-2)}=\frac{\sqrt{5}-2}{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-2}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}-2\sqrt{5}-6}{9-5}=\boldsymbol{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

Příklad 2

Určete součet nekonečné geometrické řady

$$1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\frac{81}{256}-\frac{243}{1024}+\cdots$$

Řešení

Tuto úlohu můžeme vyřešit dvěma způsoby. Buď a) přímo nebo b) po uspořádání na rozdíl dvou nekonečných geometrických řad s kladnými členy.

a) Přímou metodou určíme první člen a kvocient geometrické řady $a_1=1; q=-\frac{3}{4}$ a dále již snadno určíme

$$\boldsymbol{s}=\frac{1}{1-(-\frac{3}{4})}=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\frac{4}{7}}.$$

b) V tomto případě budeme mít dvě geometrické řady – tu, která je složená z lichých členů a tu, která je složená ze sudých členů zadané posloupnosti.
První posloupnost:

$$a_1=1; q=\frac{9}{16} \text{ a } s_1=\frac{1}{1-\frac{9}{16}}=\frac{16}{7}$$

Druhá posloupnost:

$$a_1=\frac{3}{4}; q=\frac{9}{16} \text{ a } s_2=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{3\cdot 16}{4\cdot 7}=\frac{12}{7}$$

Celkem je tedy

$$\boldsymbol{s}=s_1-s_2=\frac{16}{7}-\frac{12}{7}=\boldsymbol{\frac{4}{7}}.$$

Příklad 3

V množině reálných čísel řešte rovnici

$$2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \cdots = 1.$$

Řešení

Zadanou rovnici upravíme na tvar

$$2^x + (2^x)^2 + (2^x)^3 + (2^x)^4 + \cdots = 1.$$

Na levé straně se nachází nekonečná geometrická řada s kvocientem $q = 2^x$ $(2^x > 0 \text{ pro } \forall x \in \boldsymbol{R})$. Aby byla konvergentní, musí být

$$2^x < 1 \;\rightarrow 2^x < 2^0 \;\rightarrow x < 0.$$

Její součet potom je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^x}{1-2^x}.$$

Danou rovnici jsme tedy převedli na tvar

$$\frac{2^x}{1-2^x} = 1$$

a dále

$$2^x = 1 - 2^x$$

$$2 \cdot 2^x = 1$$

$$2^{x+1} = 2^0$$

$$\boldsymbol{x = -1}.$$

Nalezený kořen vyhovuje podmínce $x < 0$.

Příklad 4

Racionální čísla vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla:

a) $0,\overline{72}$ b) $1{,}3\overline{45}$

Řešení

a) Jedná se o racionální číslo dané ryze periodickým desetinným rozvojem, které můžeme přepsat na tvar

$$0,\overline{72} = \frac{72}{10^2} + \frac{72}{10^4} + \cdots + \frac{72}{10^n} + \cdots.$$

To představuje konvergentní nekonečnou geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \frac{72}{10^2}$ a s kvocientem $q = \frac{1}{10^2}$. Kvocient splňuje podmínku $|q| < 1$ a pro součet této řady platí

$$\mathbf{0,\overline{72}} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{72 \cdot 10^{-2}}{1 - 10^{-2}} = \frac{72}{10^2 - 1} = \frac{72}{99} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}}.$$

b) V tomto případě se jedná o racionální číslo s neryze periodickým desetinným rozvojem, ale obdobně jako v předchozí úloze můžeme napsat

$$1{,}3\overline{45} = \frac{13}{10} + \frac{45}{10^3} + \frac{45}{10^5} + \frac{45}{10^7} + \cdots + \frac{45}{10^{2n+1}} + \cdots.$$

Počínaje druhým zlomkem se opět jedná o geometrickou řadu s prvním členem $a_1 = \frac{45}{10^3}$ a s kvocientem $q = \frac{1}{10^2}$, takže

$$1{,}3\overline{45} = \frac{13}{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{45}{10^{2n+1}} = \frac{13}{10} + \frac{a_1}{1-q}$$

a tedy

$$\mathbf{1,3\overline{45}} = \frac{13}{10} + \frac{45}{990} = 1 + \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{22}\right) = 1\frac{19}{55} = \frac{\mathbf{74}}{\mathbf{55}}.$$

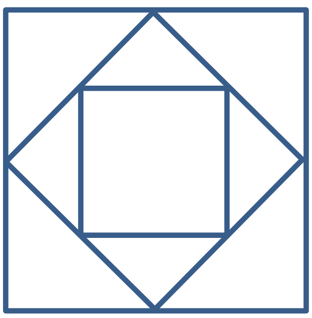
Příklad 5

Je daný čtverec o straně *a*. Do něho je vepsaný čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran daného čtverce. Takto vzniklému čtverci vepíšeme čtverec s vrcholy ve středech jeho stran atd. Postup stále opakujeme. Určete součet

a) obvodů,
b) obsahů

takto vzniklých čtverců.

Řešení



Strany čtverce tvoří geometrickou posloupnost, stejně tak geometrickou posloupnost tvoří součty obvodů čtverce a součty obsahů čtverce. Platí:

Strana	Obvod	Obsah
$a_1 = a$	$4a$	a^2
$a_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$2a\sqrt{2}$	$\frac{a^2}{2}$
$a_3 = \frac{a}{2}$	$2a$	$\frac{a^2}{4}$
$a_4 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$	$a\sqrt{2}$	$\frac{a^2}{8}$
…	…	…

a) Proto pro součet obvodů platí:

$$4a + 2a\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} + \cdots = a \cdot (4 + 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} + \cdots).$$

V závorce se jedná o součet nekonečné geometrické řady s prvním členem 4 a kvocientem $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Takže

$$\boldsymbol{s} = a \cdot \frac{4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = a \cdot \frac{8}{2 - \sqrt{2}} = \boldsymbol{4a \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)}$$

Součet obvodů takto vzniklých čtverců je $4a \cdot \left(2 + \sqrt{2}\right)$.

b) Pro součet obsahů platí:

$$a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \cdots = a^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right).$$

V závorce se opět jedná o součet nekonečné geometrické řady s prvním členem tentokrát 1 a kvocientem $\frac{1}{2}$.

Takže

$$\boldsymbol{s} = a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \boldsymbol{2a^2}.$$

Součet obsahů takto vzniklých čtverců je $2a^2$.

Úlohy k procvičení

1. Vypočítejte součet $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \cdots$

$$[\mathbf{4}]$$

2. Určete součet řady $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$

$$\left[\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right]$$

3. Řešte v množině reálných čísel rovnici

$$(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \cdots = 1.$$

$$\left[\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right]$$

4. Racionální čísla vyjádřete ve tvaru zlomku, jehož čitatel a jmenovatel jsou nesoudělná přirozená čísla:
   a) $0,\overline{37}$
   b) $3{,}1\overline{7}$

$$\left[\boldsymbol{a})\ \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{99}};\ \boldsymbol{b})\ \frac{\mathbf{143}}{\mathbf{45}}\right]$$

5. Spirála se skládá z polokružnic, z nichž první má poloměr 10 cm a každá následující polokružnice má poloměr rovný dvěma třetinám poloměru předcházející polokružnice. Určete délku spirály.

$$[\mathbf{30}\ \boldsymbol{\pi}\ \mathbf{cm}]$$

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.
BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.
CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.
ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-391-2.
PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.