INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

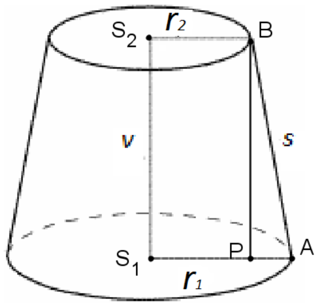
POVRCH A OBJEM VÁLCE A KUŽELU

Autor	Hana Machalová
Jazyk	Čeština
Datum vytvoření	10. 2. 2014
Cílová skupina	žáci 18 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí vypočítat povrchy a objemy válců a kuželů, využívá přitom metrické vlastnosti. Dovede vyjádřit ze vzorců pro objemy a povrchy jednotlivé neznámé. Dále dokáže aplikovat výpočty objemů a povrchů těles v praktických úlohách.
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1. Komolý rotační kužel má poloměry podstav a výšku v poměru 3 : 11 : 15 a povrch $S = 368\pi \ cm^2$. Vypočítejte jeho objem.

Řešení:



Obr. 1

Díky známému poměru poloměrů a výšky můžeme zapsat:

$r_2 = 3x$

$r_1 = 11x$

$v = 15x$

Dále víme, že $S = 1472\pi \ cm^2$.

Povrch rotačního komolého kužele se vypočítá:

$S = \pi[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot s]$

Abychom ze vzorce získali rovnici o jedné neznámé x, musíme si ještě vyjádřit s:
Z pravoúhlého trojúhelníku PAB, kde |AB|=s, |PA|=r_1-r_2 můžeme pomocí Pythagorovy věty vyjádřit:

$$s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + v^2} = \sqrt{(11x - 3x)^2 + (15x)^2} = \sqrt{64x^2 + 225x^2} = \sqrt{289x^2} = 17x$$

Nyní už můžeme dosadit do vzorce pro obsah rotačního komolého kužele za $s = 17x$; $r_2 = 3x; r_1 = 11x; v = 15x$:

$$S = \pi[r_1^2 + r_2^2 + (r_1 + r_2) \cdot s] = \pi\left[9x^2 + 121x^2 + (3x + 11x) \cdot 17x\right] = \pi \cdot 368x^2$$

Ze zadání známe povrch komolého kužele. Dostaneme tedy rovnici:

$\pi \cdot 368x^2 = 1472\pi$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Protože pro x, by po dosazení vyšli záporné délky úseček, řešením je pouze $x = 2$.

Dosadíme tedy $x = 2$ a vypočítáme poloměry a výšku:

$r_2 = 3x = 6$

$r_1 = 11x = 22$

$v = 15x = 30$

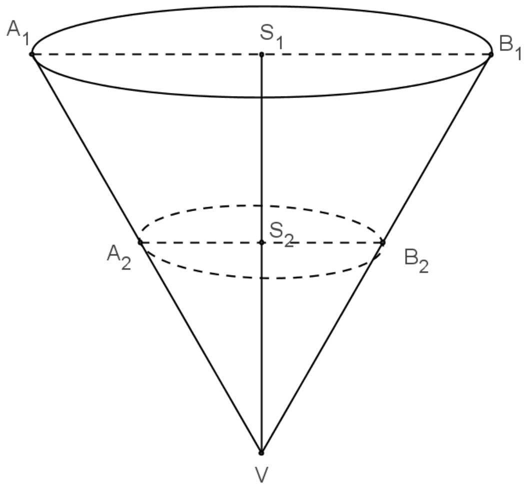
Nyní můžeme spočítat objem komolého kuželu:

$$V = \frac{\pi \cdot v}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) = \frac{\pi \cdot 30}{3}\left(6^2 + 6 \cdot 22 + 22^2\right) = 10\pi \cdot 652 = 6520\pi$$

$V \cong 20483{,}18\, cm^2$

2. Nálevka má tvar rovnostranného kužele. Vypočítejte obsah plochy smáčené vodou v případě, že do nálevky nalijete 3 litry vody.

Řešení:



Obr. 2

Trojúhelník $\Delta A_1 B_1 V \cong \Delta A_2 B_2 V\ (uu)$, část nálevky naplněná vodou je tedy opět rovnostranný kužel (viz obr 2).

Víme, že $|A_2 S_2| = r$

$|A_2 V| = 2r$

Z pravoúhlého trojúhelníku $\Delta A_2 S_2 V$ pomocí Pythagorovy věty vypočítáme výšku kuželu

$$|S_2 V| = v = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$$

Nyní si vyjádříme objem kužele a následně dosadíme za V=3l:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 v=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{3}r=\frac{\pi\sqrt{3}r^3}{3}=3$$

$$\frac{\pi\sqrt{3}r^3}{3}=3$$

$$\pi\sqrt{3}r^3=9$$

$$r^3=\frac{9}{\pi\sqrt{3}}$$

$$r^3=\frac{\sqrt{27}}{\pi}$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{\pi}}$$

Obsah plochy smáčené vodou vypočítáme pomocí vzorce pro obsah pláště rotačního kužele:

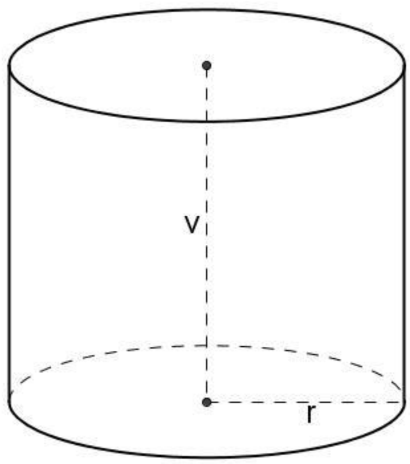
$$S_{pl}=\pi rs=\pi r2r=2\pi r^2=2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{27}}{\pi}}\right)^2=2\pi\sqrt[3]{\frac{27}{\pi}}=2\pi\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}=6\pi^{1-\frac{2}{3}}=6\pi^{\frac{1}{3}}=6\sqrt[3]{\pi}$$

$$S_{pl}=6\sqrt[3]{\pi}\ dm^2$$

Obsah plochy nálevky smočené vodou o objemu 3 litry je $6\sqrt[3]{\pi}\ dm^2$.

3. Jaký průměr má 100 m dlouhý měděný drát, je-li jeho hmotnost 40 kg a hustota mědi je 8900 kg/m^3?

Řešení:



Obr. 3

Nejprve budeme muset určit objem drátu a poté vyjádříme průměr ze vzorce pro objem válce.
Objem válce vypočítáme ze vztahu:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

$$V = \frac{40}{8900} = \frac{2}{442}$$

$$V = \frac{2}{442} m^3$$

Pro objem válce platí:

$$V = \pi r^2 v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v$$

$$V = \pi \frac{d^2}{4} v$$

$$d^2 = \frac{4V}{\pi v}$$

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi v}}$$

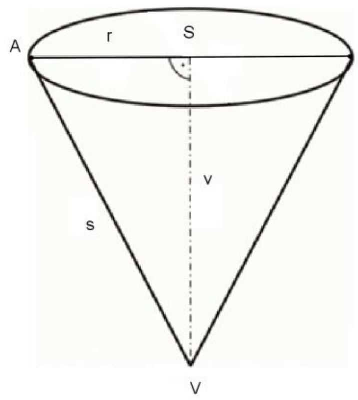
$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot \frac{2}{445}}{\pi \cdot 100}} = \sqrt{\frac{8}{445} \cdot \frac{1}{100\pi}} = \sqrt{\frac{2}{11125\pi}}$$

$$d \cong 0{,}007565\, m$$

$$d \cong 7{,}565\, mm$$

Měděný drát má průměr přibližně 7,565 mm.

4. Děti si mají vyrobit kornouty na sladkosti. Kornout má mít tvar kužele o výšce 40 cm a průměru 20 cm. Jaký jakou plochu a jaký tvar bude mít papír, který si děti na kornout vystřihnou (nebereme v úvahu překrytí – slepí jej izolepou). Jaký bude mít kornout objem?



Obr. 4

Řešení:

Kužel nebude mít podstavu (kornout nebude uzavřený), budeme tedy počítat pouze plochu pláště:

$S_{pl} = \pi rs$

Stranu kužele vypočítáme pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku AS (přitom $v = 40cm,\ r = \frac{d}{2} = 10cm)$:

$s^2 = r^2 + v^2$

$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{10^2 + 40^2} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$

$S_{pl} = \pi rs = \pi r 10\sqrt{17} = \pi \cdot 100\sqrt{17}$

$S_{pl} \cong 1295 cm^2$

Papír, který si na kornout děti vystřihnou, bude mít tvar kruhové výseče s poloměrem s a středovým úhlem α (viz obr. 5).

Víme, že $s = 10\sqrt{17}\,cm$.

Označme O_K - obvod kružnice, O_V - obvod výseče.

Platí, že:

$O_K = 2\pi s$

$O_V = 2\pi r$

Velikost úhlu α vypočítáme z přímé úměry:

$$\frac{O_V}{O_K} = \frac{\alpha}{360}$$

$$\alpha = 360 \cdot \frac{O_V}{O_K}$$

$$\alpha = 360 \cdot \frac{2\pi r}{2\pi s}$$

$$\alpha = \frac{360r}{s} = \frac{360 \cdot 10}{10\sqrt{17}} = \frac{360}{\sqrt{17}} = \frac{360\sqrt{17}}{17}$$

$$\alpha = 87°19'$$

Objem kornoutu vypočítáme ze vzorce pro objem kužele:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3}\pi 10^2 \cdot 40 = \frac{4000\pi}{3}$$

$$V \cong 4188{,}79 cm^3$$

Papír, který děti na kornout vystřihnou, bude mít plochu 1295 cm^2 a tvar kruhové výseče s poloměrem $s = 10\sqrt{17}\,cm$ a středovým úhlem $\alpha = 87°19'$. Jeho objem bude 4188,79 cm^3.

Příklady k procvičování:

1. Objem kužele je $V = 9\sqrt{3}\pi\, dm^3$, odchylka strany kužele od roviny podstavy je $\alpha = 60°$. Určete obsah pláště tohoto kužele.

[$S = 18\pi\, dm^2$]

2. Vypočítejte poloměr podstavy a objem rotačního kužele, jestliže rozvinutý plášť je kruhová výseč s poloměrem 3 cm a středovým úhlem $120°$.

[$r = 1\, cm, V = \frac{2}{3}\pi\sqrt{2}\, cm^3$]

3. Komín tvaru dutého komolého rotačního kužele má výšku 32 m, dolní průměry 3,2 m a 2 m, horní průměry 1,7 m a 1,2 m. Jaká je jeho celková hmotnost, jestliže hustota zdiva je 1600kg/m^3?

[$m = 143{,}820\, t$]

4. Komolý rotační kužel má podstavy o poloměrech $r_1 = 8cm,\ r_2 = 4cm$ a výšku $v = 5cm$. Jaký je objem kužele, z něhož komolý kužel vznikl?

[$V = \frac{640\pi}{3} cm^3$]

5. Určete rozměry válcové nádoby o objemu 5 litrů, jestliže výška nádoby se rovná polovině průměru její podstavy.

[$v = r = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}dm}$]

6. Rotační válec má povrch $S = 20\pi\, dm^2$, úhlopříčka jeho osového řezu má délku $u = 5dm$. Určete jeho objem V.

[$V_1 = 12\pi\, dm^3, V_2 = 5\sqrt{5}\pi\, dm^3$]

Použité zdroje a literatura:

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.
BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.
KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.
VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.