Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

PYTHAGOROVA VĚTA, EUKLIDOVY VĚTY

Autor	Jana Homolová
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	7. 10. 2012
Cílová skupina	žáci 16 – 19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák ovládá Pythagorovu větu a Euklidovy věty a umí je aplikovat při řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

Řešené příklady:

1) Rozhodněte, zda trojúhelník, jehož strany mají délky $2; \boldsymbol{k-k^{-1}}; \boldsymbol{k+k^{-1}}$, kde $\boldsymbol{k} \in (\mathbf{1};\ \infty)$, je pravoúhlý.

Řešení:

Je-li trojúhelník pravoúhlý, platí pro jeho strany Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$.

Označíme strany trojúhelníka: $c = k + k^{-1}; a = 2; b = k - k^{-1}$ *, určíme* c^2 , $a^2 + b^2$ $a\ porovn\acute{a}me.$

$$c^2 = (k + k^{-1})^2 = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 = \left(\frac{k^2+1}{k}\right)^2 = \frac{k^4 + 2k^2 + 1}{k^2}$$

$$a^2 + b^2 = 2^2 + (k - k^{-1})^2 = 4 + \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 4 + \left(\frac{k^2-1}{k}\right)^2 = 4 + \frac{k^4 - 2k^2 + 1}{k^2} =$$

$$= \frac{4k^2 + k^4 - 2k^2 + 1}{k^2} = \frac{k^4 + 2k^2 + 1}{k^2}$$

Rovnost platí, trojúhelník je pravoúhlý.

---

2) Sestrojte úsečku o velikosti $\boldsymbol{h} = \sqrt{\mathbf{21}}$ užitím

a) Pytharorovy věty,

b) Euklidovy věty o odvěsně,

c) Euklidovy věty o výšce.

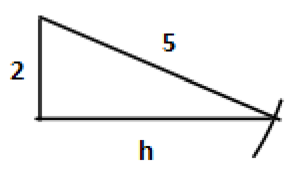
Řešení:

a) Číslo 21 vyjádříme jako rozdíl druhých mocnin dvou přirozených čísel a porovnáme s Pythagorovou větou.

$\sqrt{21} = \sqrt{5^2 - 2^2}$

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Úsečka o velikosti $h = \sqrt{21}$ *bude odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má velikost c = 5 a druhá odvěsna b = 2.*

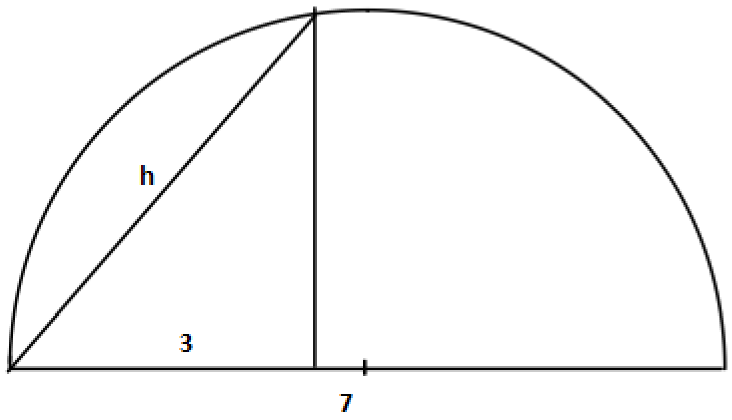


b) Číslo 21 vyjádříme jako součin dvou přirozených čísel a porovnáme s Euklidovou větou o odvěsně.

$\sqrt{21} = \sqrt{7 \cdot 3}$

$a = \sqrt{c \cdot c_a}$

Úsečka o velikosti $h = \sqrt{21}$ *bude odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má velikost c = 7 a na ní příslušný úsek* $c_a = 3$. *Trojúhelník sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice s průměrem 7.*

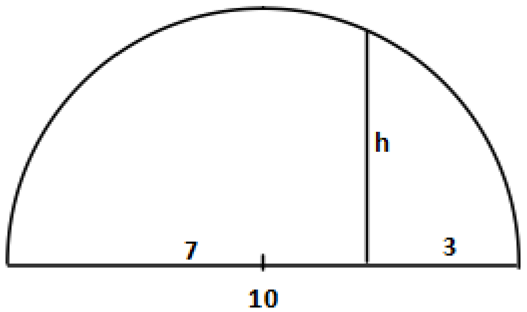


c) Číslo 21 vyjádříme jako součin dvou přirozených čísel a porovnáme s Euklidovou větou o výšce.

$\sqrt{21} = \sqrt{7 \cdot 3}$

$a = \sqrt{c_a \cdot c_b}$

Úsečka o velikosti $h = \sqrt{21}$ *bude výškou pravoúhlého trojúhelníka, jehož přepona má velikost c = 10 a na ní příslušný úsek* $c_a = 7$ *a úsek* $c_b = 3$. *Trojúhelník sestrojíme pomocí Thaletovy kružnice s průměrem 10.*



---

3) Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku s přeponou c, odvěsnami a, b a výškou *v* k přeponě, platí: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}$**.**

Řešení:

Dokazujeme pomocí Euklidových vět: $a^2 = c \cdot c_a;\ b^2 = c \cdot c_b;\ v^2 = c_a \cdot c_b.$

Pomocí nich úpravami levé strany rovnosti dospějeme k pravé straně rovnosti.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c \cdot c_a} + \frac{1}{c \cdot c_b} = \frac{c_b + c_a}{c \cdot c_a \cdot c_b} = \frac{c}{c \cdot c_a \cdot c_b} = \frac{1}{c_a \cdot c_b} = \frac{1}{v^2}$$

Rovnost platí.

Příklady k procvičování:

1) Vypočítejte obsah obdélníka s délkou strany *a = 84 cm*, je-li jeho úhlopříčka o *72 cm* větší nežli jeho šířka.
(správné řešení: 1 092 cm^2)

2) Určete obsah pravoúhlého lichoběžníka se základnami *a = 66 cm, c = 18 cm*, je-li jeho kosé rameno o *36 cm* delší nežli jeho kolmé rameno.
(správné řešení: 588 cm^2)

3) V jakém poměru dělí polokružnice úhlopříčku opsaného obdélníka?
(správné řešení: 1 : 4)

4) Rovnoramenný lichoběžník ABCD má větší základnu $|AB| = 9\ dm$, rameno $|BC| = 6\ dm$ a $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Vypočítejte délku *c* kratší základny a výšky *v* lichoběžníka ABCD.
(správné řešení: c = 1 dm; v = $2\sqrt{5}$ dm)

5) Vypočítejte délku tětivy v kružnici o poloměru *r = 17 cm*, víte-li že tětiva dělí průměr k ní kolmý v poměru *1 : 16*.
(správné řešení: 16 cm)

6) Přímky AT, AT´ se dotýkají kružnice k(S, r) v bodech T, T´. Přímka TT´ dělí úsečku SA na úseky |SU| = 1,5 m a |UA| = 4,5 m. Vypočítejte velikosti:

a) r, b) |AT|.

(správné řešení: a) 3 m; b) $\sqrt{27}$ m)

Použité zdroje a literatura:

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995, 207 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-858-4907-0.
PETÁKOVÁ, Jindra a Leo BOČEK. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6099-3.
FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 147 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6095-0.
KUBÁT, Josef, Dag HRUBÝ a Josef PILGR. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996, 195 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985.
BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983.
VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969.
POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983.