INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt

ŠABLONY NA GVM

Gymnázium Velké Meziříčí

registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34.0948

IV-2 Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol

SHODNÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ

Autor	Ondřej Chudoba
Jazyk	čeština
Datum vytvoření	10. 11. 2012
Cílová skupina	žáci 16–19 let
Stupeň a typ vzdělávání	gymnaziální vzdělávání
Druh učebního materiálu	vzorové příklady a příklady k procvičení
Očekávaný výstup	žák umí použít znalosti shodných zobrazení k řešení úloh
Anotace	materiál je vhodný nejen k výkladu a procvičování, ale i k samostatné práci žáků, k jejich domácí přípravě, velké uplatnění najde zejména při přípravě žáků k maturitní zkoušce

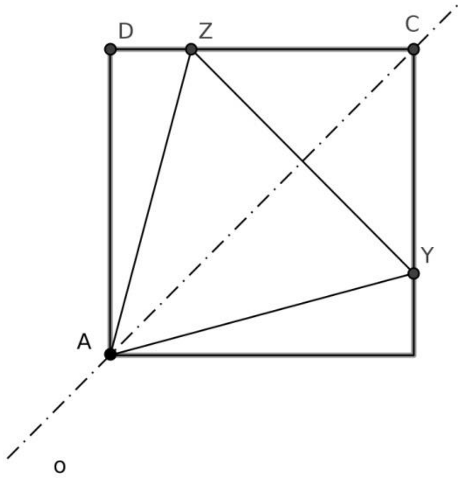
Řešené příklady:

1) Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník AYZ tak, aby $Y \in BC, Z \in CD$.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha je vyřešena (viz obr. 1).



obr. 1

Bod Z je osově souměrný s bodem Y v osové souměrnosti s osou AC. Z této úvahy vyplývá postup konstrukce.

Popis konstrukce.

1, $\measuredangle CAK;\ |\measuredangle CAK| = 30°$

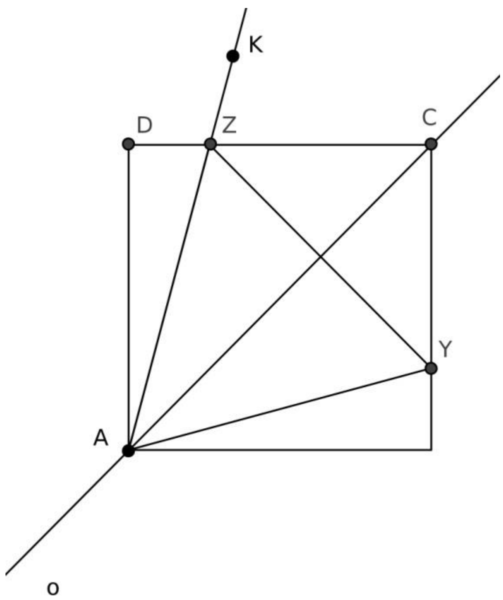
2, $Z; Z = \mapsto AK \cap DC$

3, $o, o = AC$

4, $Y; O(o): Z \ \longrightarrow Y$

5, AZY

Konstrukce.



obr. 2

Diskuse.

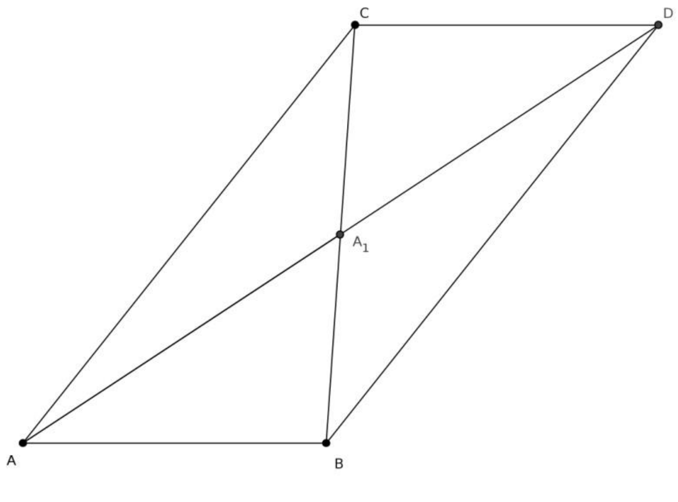
Úloha má 1 řešení.

2) Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1|$ = 5 cm). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí c = 4 cm, b = 7 cm.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 3).



obr. 3

Trojúhelník ABC doplníme na rovnoběžník $ABCD$, ve kterém známe délky stran trojúhelníka ABD. Bod A_1 je potom středem strany AD. Bod C je potom obrazem bodu B ve středové souměrnosti podle bodu A_1. Z těchto úvah vyplývají hlavní body postupu konstrukce:

1, trojúhelník ABD podle věty sss

2, rovnoběžník $ABCD$

3, $C, S(A_1): B \rightarrow C$, kde A_1 je střed AD

Popis konstrukce.

1, AB; $|AB| = 4$ cm

2, k_1; $k_1(A, 10$ cm$)$

3, k_2; $k_2(B, 7$ cm$)$

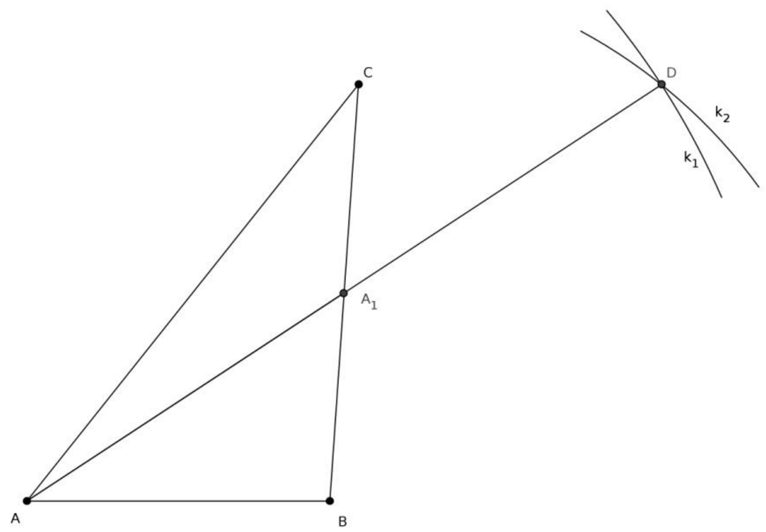
4, D; $D = k_1 \cap k_2$

5, A_1; A_1 je střed AD

6, C; $S(A_1): B \longrightarrow C$

7, $\triangle ABC$

Konstrukce.



obr. 4

Diskuse.

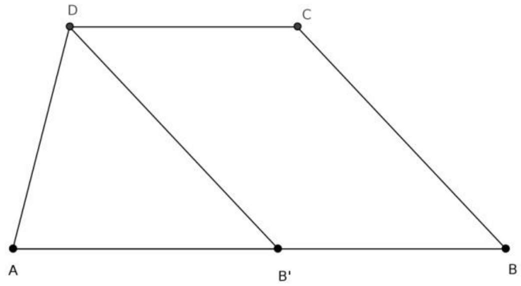
Úloha má 1 řešení.

3) Sestrojte lichoběžník *ABCD (AB || CD)*, je-li dáno *a* = 6,5 cm, *b* = 4 cm, *c* = 3 cm, *d* = 3 cm.

Řešení:

Rozbor.

Předpokládejme, že úloha má řešení (viz obr. 5).



obr. 5

V translaci o vektor ***CD*** se bod *B* zobrazí do bodu *B'*. Bod *C* se zobrazí do bodu *D*. Vznikne tak trojúhelník *AB'D*, v němž známe délky všech stran. Nejprve tedy narýsujeme trojúhelník AB'D (podle věty sss). Z těchto úvah vyplývají hlavní body postupu konstrukce:

1, $AB'D\ (sss)$

2, $C; T(B'B): D \longrightarrow C$

Popis konstrukce.

1, $AB'; |AB'| = 3{,}5$ cm

2, $k_1; k_1(B', 4\text{ cm})$

3, $k_2; k_2(A, 3\text{ cm})$

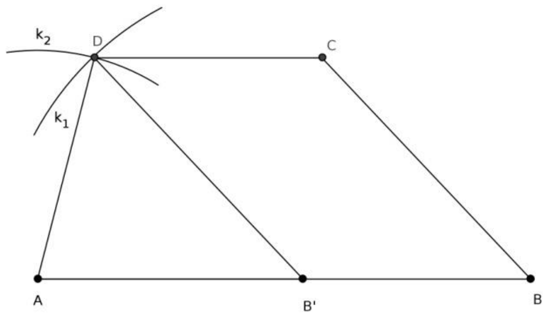
4, $D; D = k_1 \cap k_2$

5, $B; |AB| = 6{,}5\text{ cm}, B' \in AB$

6, $C; T(B'B): D \longrightarrow C$

7, lichoběžník $ABCD$

Konstrukce.



obr. 6

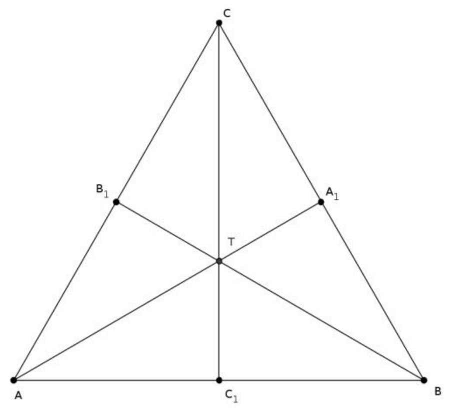
Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

4) Ve kterém otočení je samodružný rovnostranný trojúhelník?

Řešení:

Viz obr. 7, odtud je zřejmé, že zadání vyhovuje každé otočení ve tvaru $R(T, k \cdot 120°)$, kde $k \in Z$ a T je těžiště trojúhelníka.



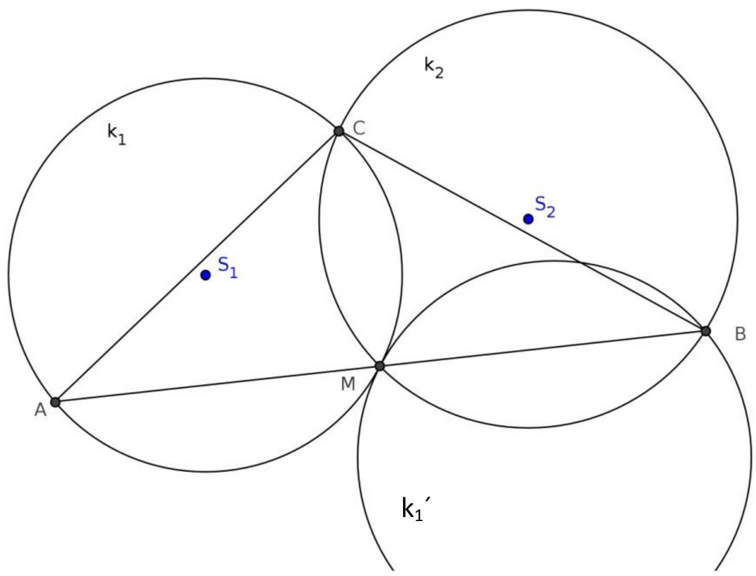
obr. 7

5) Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2, které se protínají ve 2 bodech *M*, *C*. Sestrojte trojúhelník *ABC* tak, že $A \in k_1, B \in k_2, C \in k_1 \cap k_2, |MA| = |MB|$.

Řešení:

Rozbor.

Ve středové souměrnosti se středem *M* přejde bod *A* do bodu *B*. $S(M)$: $k_1 \to k_1', B \in k_1' \cap k_2$. Bod *A* je potom obrazem bodu *B* ve středové souměrnosti podle středu *M*.



obr. 8

Popis konstrukce.

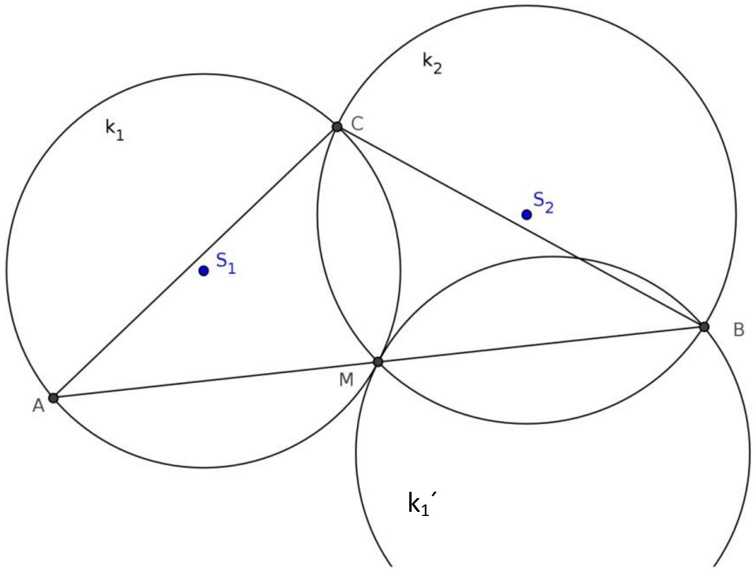
1, $k_1'; S(M): k_1 \rightarrow k_1'$

2, $B; B = k'_1 \cap k_2$

3, $A\,; S(M): B \rightarrow\ A$

4, trojúhelník ABC

Konstrukce.

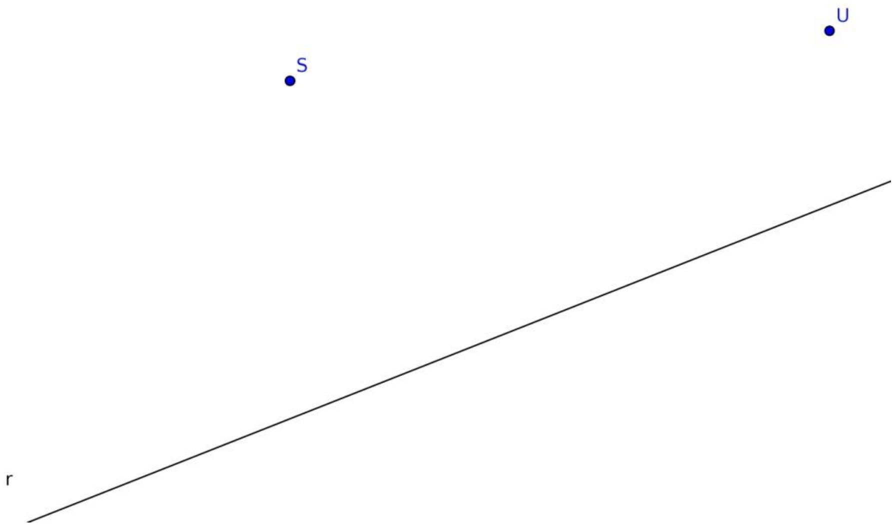


obr. 9

Diskuse.

Úloha má 1 řešení.

6) Marie musí od stanu *S* dojít k řece *r*, nabrat vodu a donést ji do umývárny *U*. Určete Marii cestu, tak aby byla co nejkratší. Viz obr. 10.



obr. 10

Řešení:

Rozbor.

V osové souměrnosti s osou *r* přejde bod *U* do bodu *U′*. Průsečík *P* úsečky *SU′* a přímky *r* je potom místem, kde Marie nabere vodu. To proto, že čára *SPU* je nejkratší cestou dle zadání.

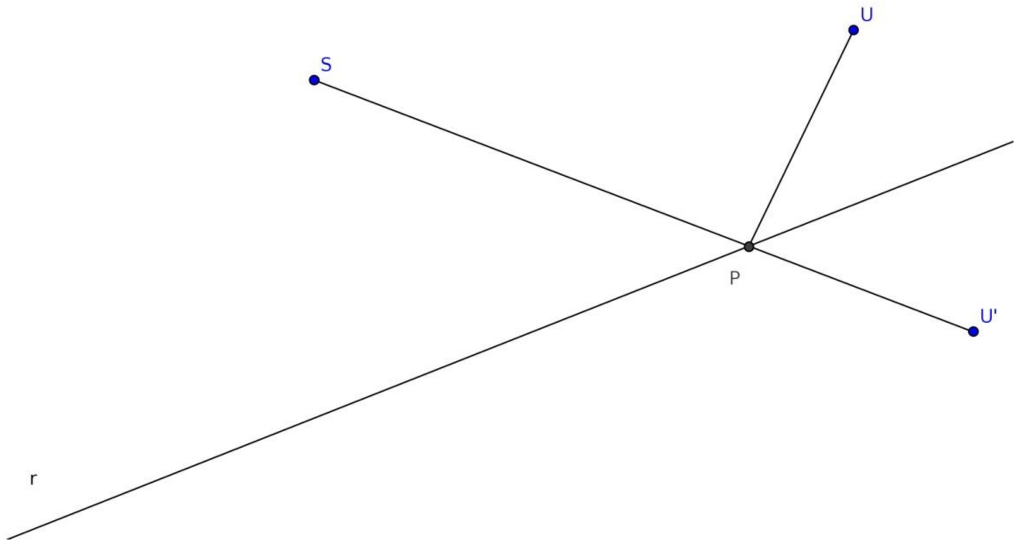
Popis konstrukce.

1, $U'; O(r): U \to U'$

2, $P; P = SU' \cap r$

3, *SPU* je potom hledaná cesta

Konstrukce.



obr. 11

Diskuse.

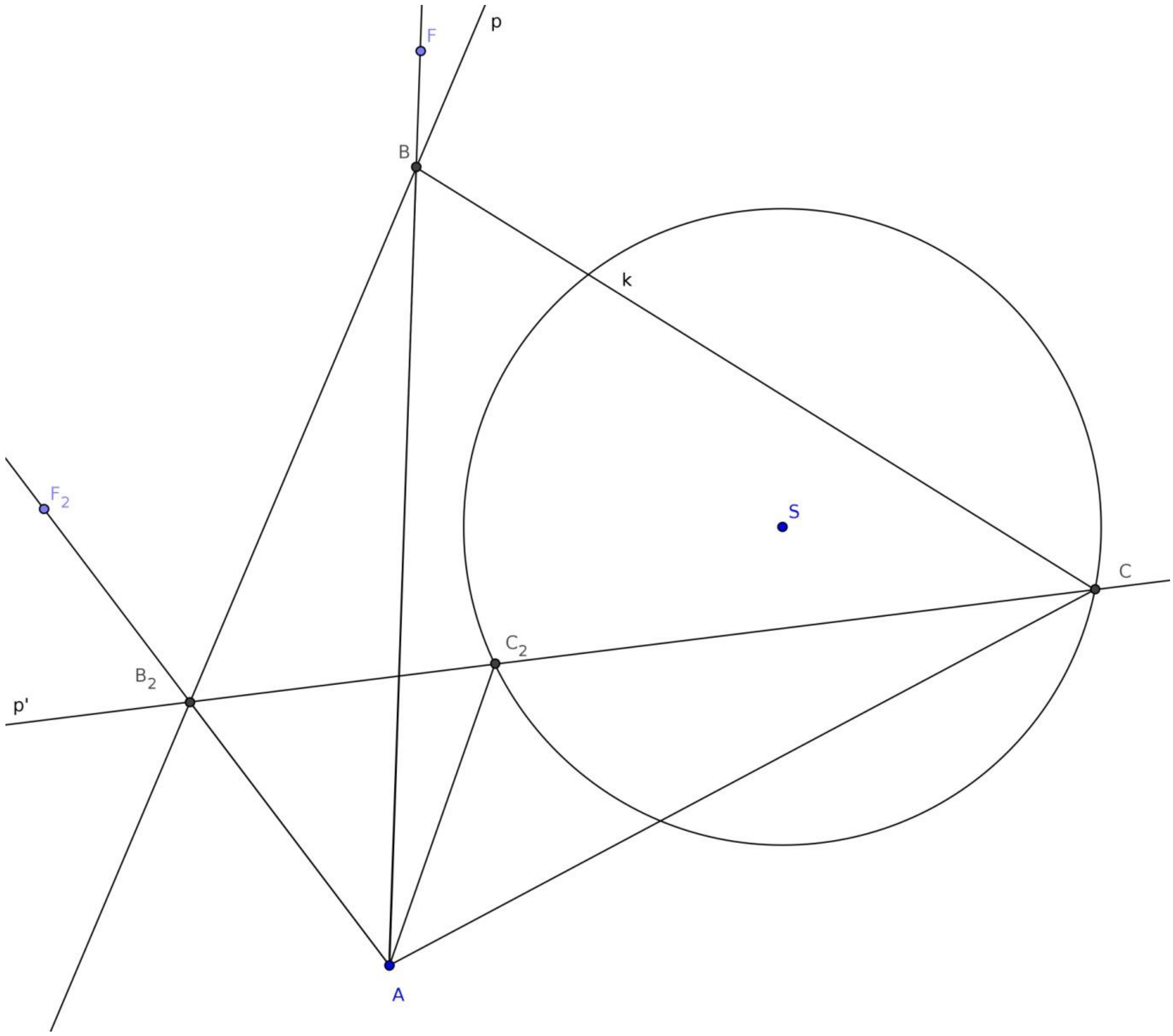
Úloha má 1 řešení.

7) Jsou dány kružnice *k* a přímka *p* mimo *k*, dále je dán bod *A*, který leží vně kružnice *k* a neleží na přímce *p*. Narýsujte rovnostranný trojúhelník *BAC* tak, aby vrchol *B* trojúhelníka ležel na přímce *p* a vrchol *C* na kružnici *k*.

Řešení:

Rozbor.

V rotaci kolem bodu *A* o ±60° přejde bod *B* do bodu *C*, přímka *p* protne kružnici *k* v bodě *C*.



obr. 12

Popis konstrukce.

1, R ; $R(A, \pm 60°)$: $p \rightarrow p'$

2, C; $C = p' \cap k$

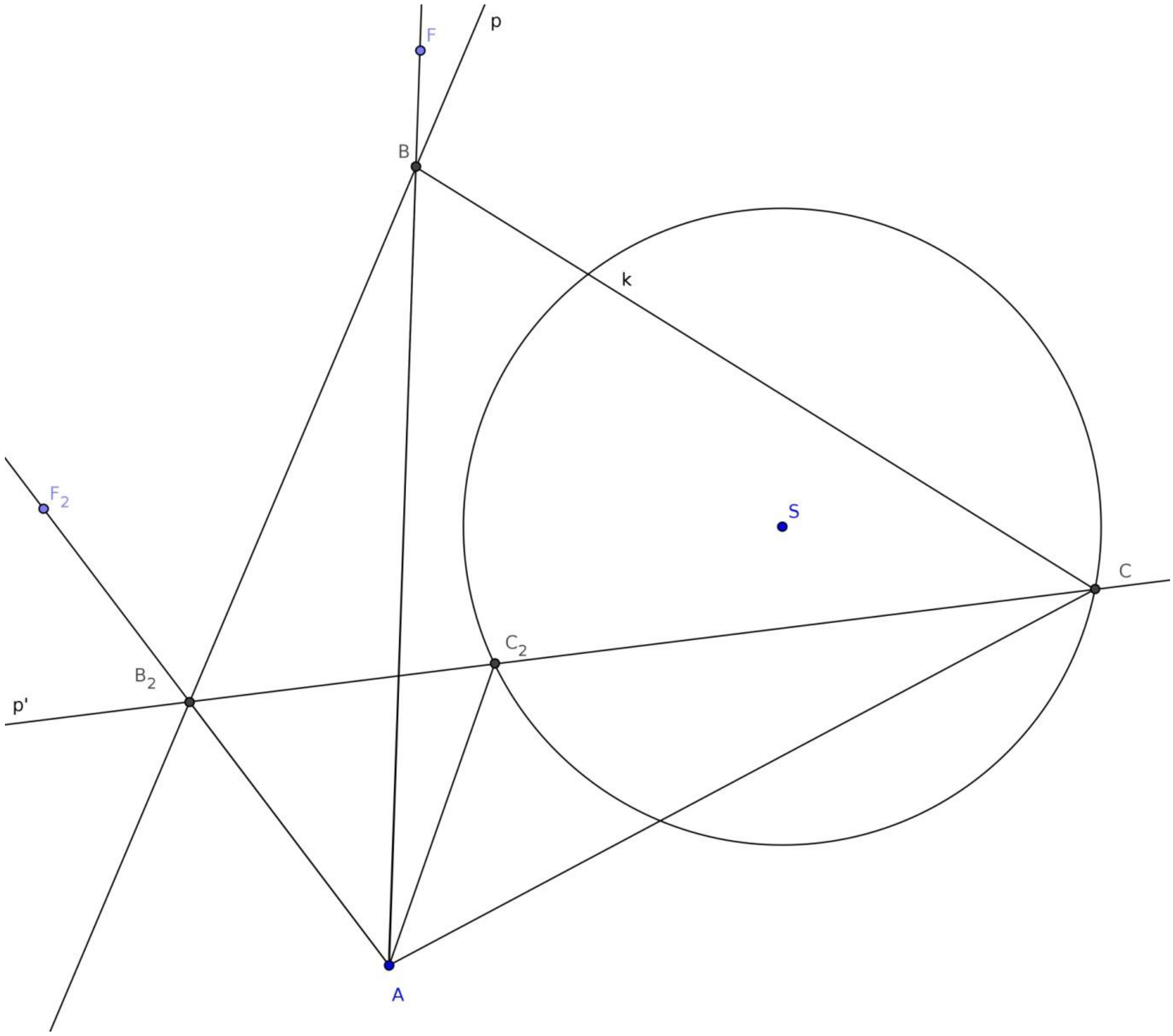
2, $AF; |\measuredangle CAF| = 60°$

3, $B; B \in p \ \cap AF$

4, Trojúhelník BAC

Konstrukce

Úloha má 2 řešení, jelikož přímka p´ protne kružnici k ve dvou bodech. V obrázku je druhé řešení označeno číslem 2 v indexu.



obr. 13

Diskuse.

Úloha má 2 řešení. Úloha může obecně mít 2–4 řešení v závislosti na vzájemné poloze zadaných útvarů.

Úlohy k procvičení:

1. Je dána uzavřená lomená čára *ABCDA*, které je hranicí čtverce *ABCD*. Ve kterých osových souměrnostech má daná lomená čára

   a) právě dva samodružné body,

   b) právě jeden samodružný bod,

   c) samodružnou právě jednu úsečku, která tvoří stranu čtverce,

   d) samodružné právě dvě úsečky, které tvoří strany čtverce?

   [a) $O(AC)$, $O(BD)$, b) neexistuje, c) $O(AB)$, $O(BC)$, $O(CD)$, $O(AD)$, d) $O(p)$, $O(q)$, kde p je osa úsečky AB resp. q je osa úsečky BC]

2. Určete počet os, podle kterých je osově souměrný pravidelný n-úhelník.

   [n]

3. Je dána přímka p a body A, B ležící v opačných polorovinách s hraniční přímkou p, přičemž AB není kolmá na p. Sestrojte na přímce p bod V tak, aby osa úhlu AVB ležela v přímce p.

   [Návod: Sestrojíme obraz A' bodu A v osové souměrnosti s osou p. Přímka BA' protne přímku p v bodě V.]

4. Je dána úsečka AA_1 $AA_1 = 4{,}5$ cm. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6$ cm.

   [Návod: Neznámé body B, C jsou krajní body úsečky, která má střed A_1. Bod C leží na Thaletově kružnici s průměrem AA_1. Bod B leží na kružnici $k(T, \frac{2}{3} t_b)$, kde T je těžiště trojúhelníka ABC.]

5. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky obou jeho základen a, c a obou jeho úhlopříček e, f.

   [Návod: Posunutí $T(\boldsymbol{DC})$ zobrazí bod D do bodu C, bod B do bodu B', úsečku BD do úsečky $B'C'$. V trojúhelníku $AB'C'$ jsou délky stran $|AB'| = a + c$, $|B'C| = f$, $|AC| = e$. Jsou-li splněny náležité trojúhelníkové nerovnosti, lze trojúhelník sestrojit. Body B a D jsou pak obrazy bodů B' a C v posunutí $T^{-1}(\boldsymbol{DC})$.]

6. Jsou dány dvě rovnoběžné přímky a, b a mimo ně bod C. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na přímkách a, b.

   [Návod: V rovnostranném trojúhelníku ABC má úhel při vrcholu C velikost 60°. V otočení, jehož středem je bod C a úhel otočení je ±60°, je obrazem bodu A bod B, obrazem přímky a přímka a'. Proto $B \in a'$. $B \in b$, tedy $B \in a' \cap b$.]

Použité zdroje a literatura:

BENDA, Petr. A KOL. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 8. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-573-83.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro III. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1987. ISBN 14-423-87.

BUŠEK, Ivan a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro IV. ročník gymnázií*. 1. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-23966-8.

BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 1. vydání. Praha: SPN, 1985. ISBN 14-639-85.

CIBULKOVÁ, Eva a KUBEŠOVÁ Naděžda. Matematika – přehled středoškolského učiva. 2. vydání. Nakl. Petra Velanová, Třebíč, 2006. ISBN 978-80-86873-05-3.

FUCHS, Eduard a Josef KUBÁT. A KOL. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998. ISBN 80-7196-095-0.

PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika*: *příprava k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-099-3.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 4. vydání. Praha: SPN, 1983. ISBN 14-351-83.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2008. ISBN 978-80-7196-358-5.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro I. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1986. ISBN 14-237-86.

SCHMIDA, Jozef a KOL. *Sbírka úloh z matematiky pro II. ročník gymnázií*. 2. vydání. Praha: SPN, 1991. ISBN 80-04-25485-3.

VEJSADA, František a František TALAFOUS. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. 1. vydání. Praha: SPN, 1969. ISBN 15-534-69.